Universität Zürich[UZH]

Institut für Betriebswirtschaftslehre

Operations Management

Kurzfristige Kapazitätsplanung, Warteschlangenmanagement

Prof. Dr. Helmut Dietl

Lernziele

Nach dieser Veranstaltung sollen Sie wissen,

- welcher Trade-off zwischen Warte- und Servicekosten besteht
- wovon das subjektive Wartezeitempfinden abhängt und wie es sich beeinflussen lässt
- aus welchen Grundelementen ein Warteschlangensystem besteht
- inwieweit poissonverteilte Ankunftsraten dem exponentiell-verteilten Zeitabstand zwischen 2 Ankünften entsprechen
- wie man die wichtigsten Warteschlangenmodelle anwendet
- wie die wichtigsten Performancekriterien von Warteschlangensystemen berechnet werden können
- inwiefern Kapazitätsentscheidungen auf der Basis von Warteschlangenmodellen getroffen werden können

Wie zerrinnt unsere Zeit?

Soviel Zeit unseres Lebens verwenden wir für …

- 6 Monate für Warten an der Ampel
- 8 Monate für das Öffnen von Werbepost
- 1 Jahr für die Suche nach verlegten Gegenständen
- 2 Jahre für unbeantwortete Telefonanrufe
- 4 Jahre für Hausarbeit
- 5 Jahre für Warten in einer Warteschlange
- 6 Jahre für Essen

Quelle: U.S. News & World Report, 30.1.1989, S. 81

Wartephänomene

Unausweichlichkeit:

Wartezeit ist das unausweichliche Ergebnis unterschiedlicher Veränderungen bei der Ankunftsrate und der Servicerate

Warteökonomik:

Hohe Serverauslastung kann nur durch Wartezeiten der Kunden erkauft werden → Trade-off zwischen Auslastung und Wartezeit

Auswege:

- Produktive Wartezeit (Salatbuffet)
- Profitable Wartezeit (Empfangsbar)

Zwei Komponenten des Warteschlangenmanagements

Tatsächliche Wartezeit

- Objektiv
- Messbar
- Warteschlangenmodelle

Beispiel:

- Verringerung der tatsächlichen Wartezeit durch zusätzlichen Hotelaufzug

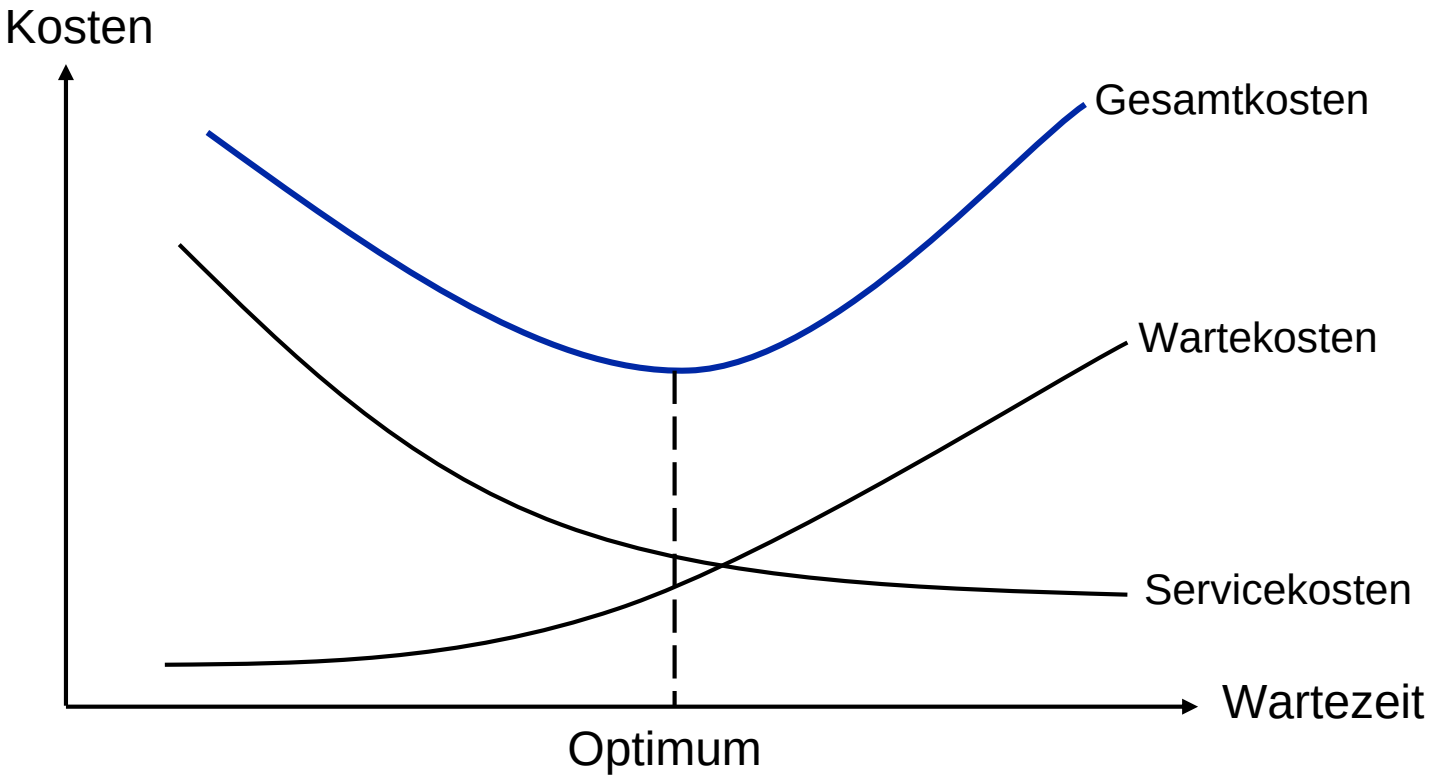
Empfundene Wartezeit

- Subjektiv
- Nicht messbar
- Psychologische Studien

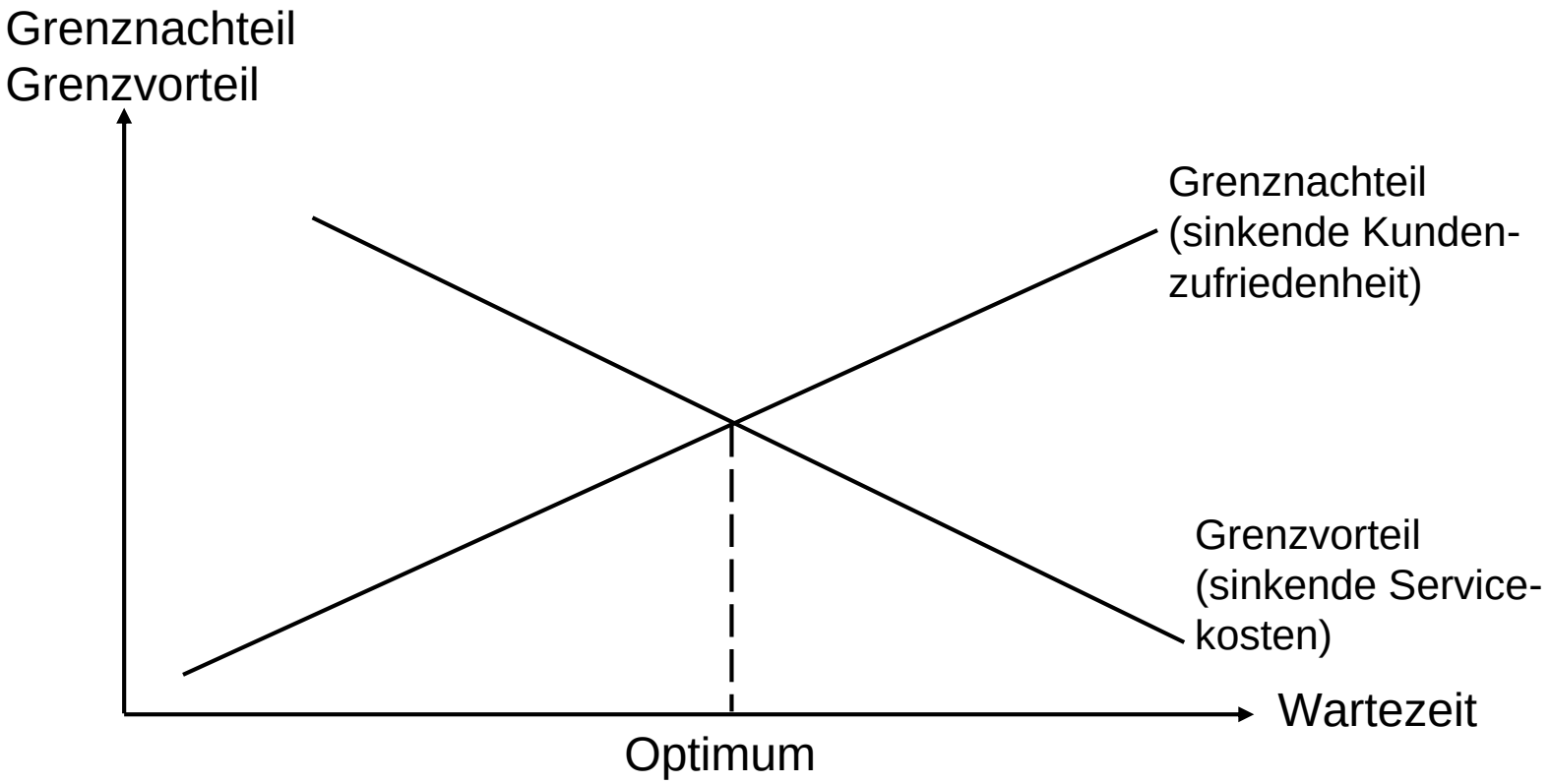
Beispiel:

- Verringerung der empfundenen Wartezeit durch Spiegel vor den Hotelaufzügen

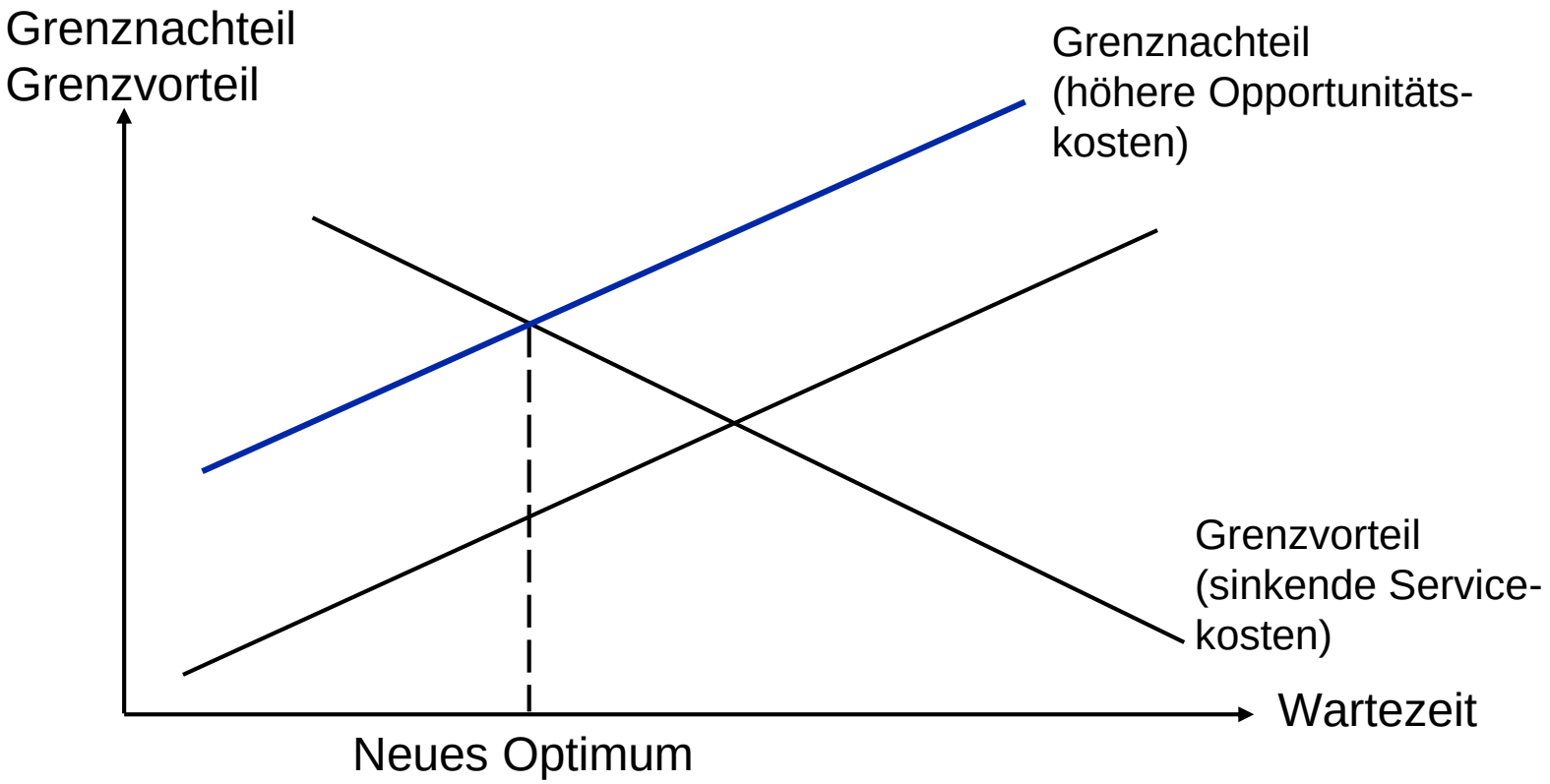
Trade-off im Warteschlangenmanagement



Trade-off Optimierung



Trade-off und Opportunitätskosten



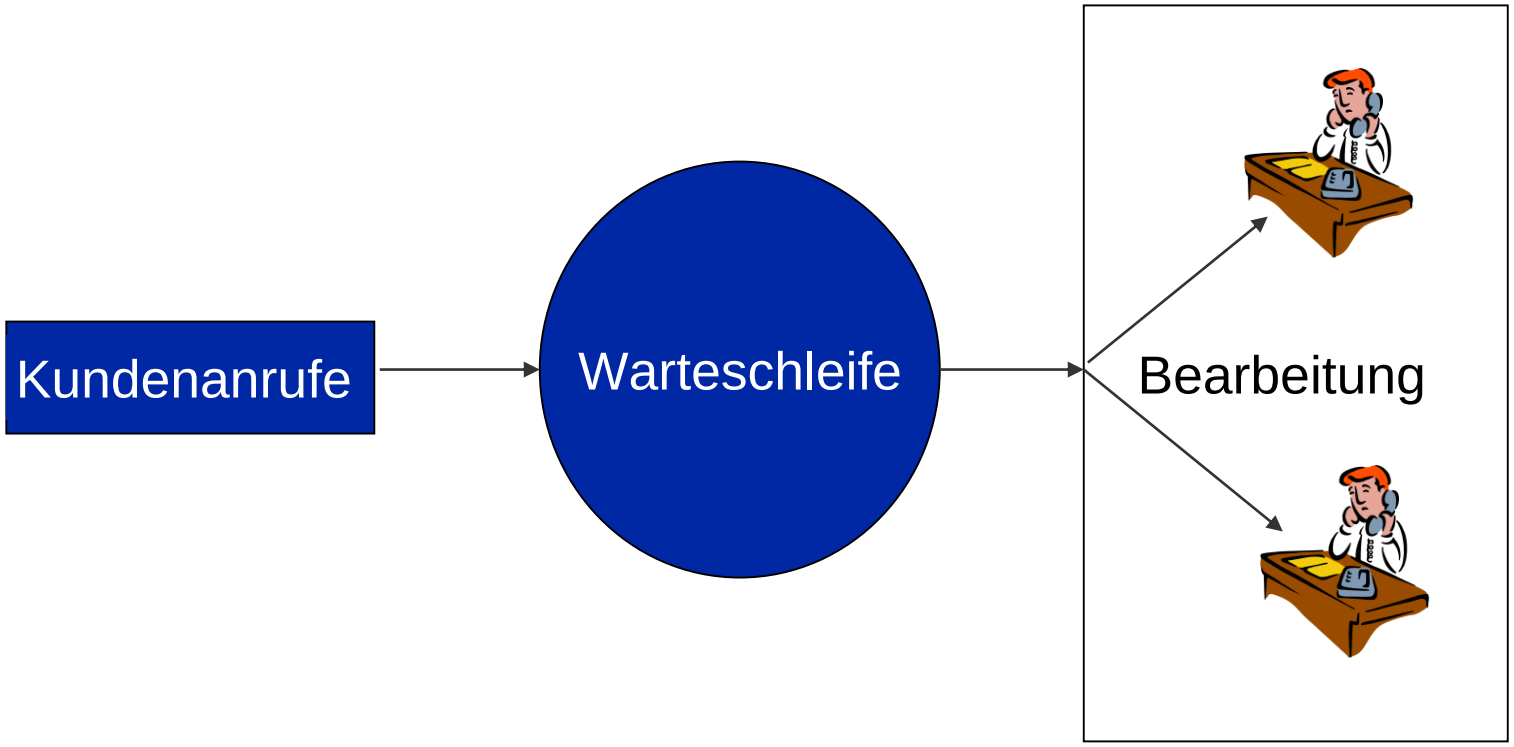
Warteschlangenpsychologie

Subjektives Zeitempfinden länger	Subjektives Zeitempfinden kürzer
Warten ohne Ablenkung/Beschäftigung	Warten mit Ablenkung/Beschäftigung
Unerwartete Wartezeit	Geplante Wartezeit
Allein warten	In der Gruppe warten
Wartezeit außerhalb des Serviceprozesses	Wartezeit innerhalb des Serviceprozesses
Besorgtes Warten	Entspanntes Warten

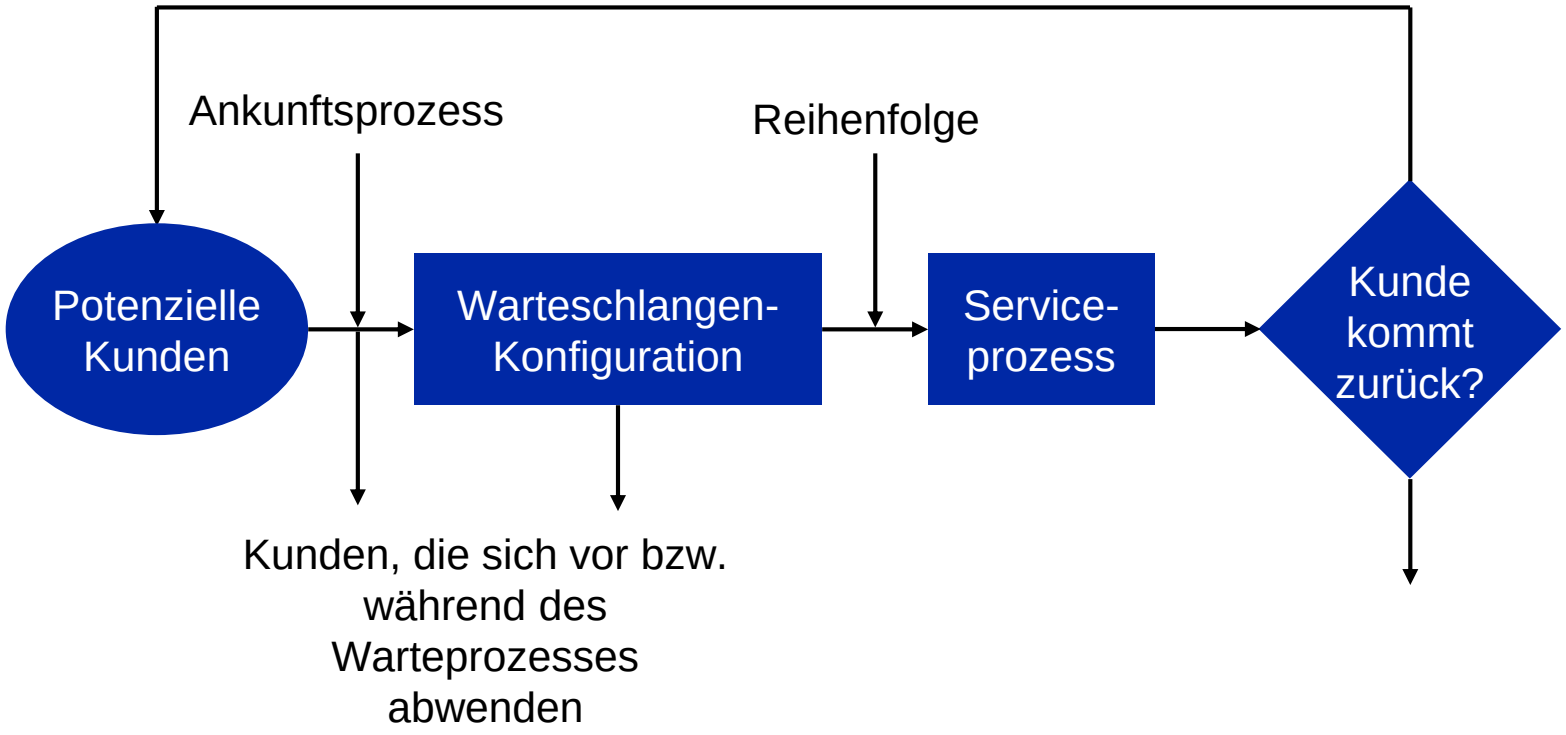
Verringerung der empfundenen Wartezeit

- Gerechte vs. ungerechte Wartezeiten
  - Nummern- und Einschlangensystem (aber: Supermarkt), keine Telefonanrufe!
- Bequeme vs. unbequeme Wartezeiten
  - Empfangsbar in Restaurants, Bestuhlung, Unterhaltung
- Erklärte vs. unerklärte (besorgniserregende) Wartezeit
  - Abflugverzögerung wegen Enteisung der Tragflächen
- Beschäftigtes vs. beschäftigungsloses Warten
  - Wartelounge mit Fax- und Internetanschluss
- Wartezeiten außerhalb vs. innerhalb des System
  - Vorprogramm im Kino

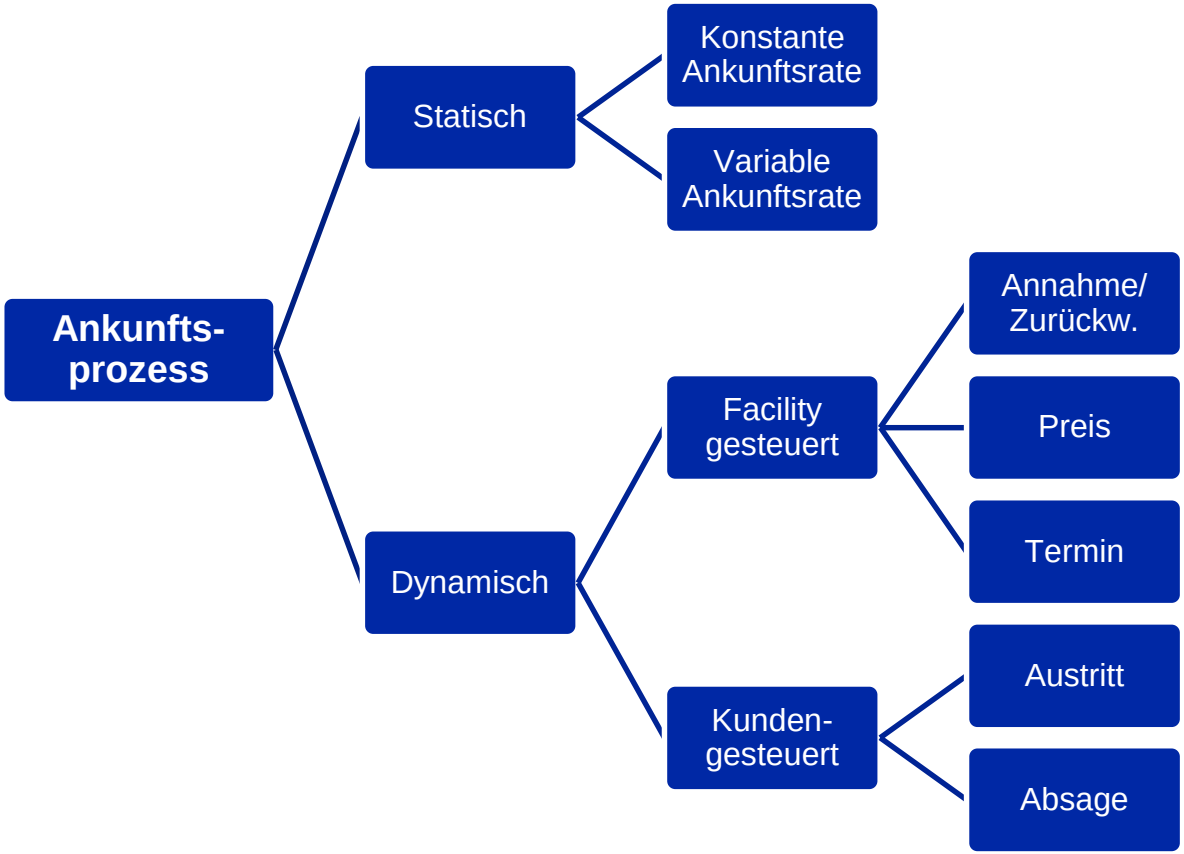
Warteschlangensysteme



Grundelemente von Warteschlangensystemen



Ankunftsprozess



Exponentialverteilung (stetig)

Dichtefunktion: $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ $\quad t \geq 0$

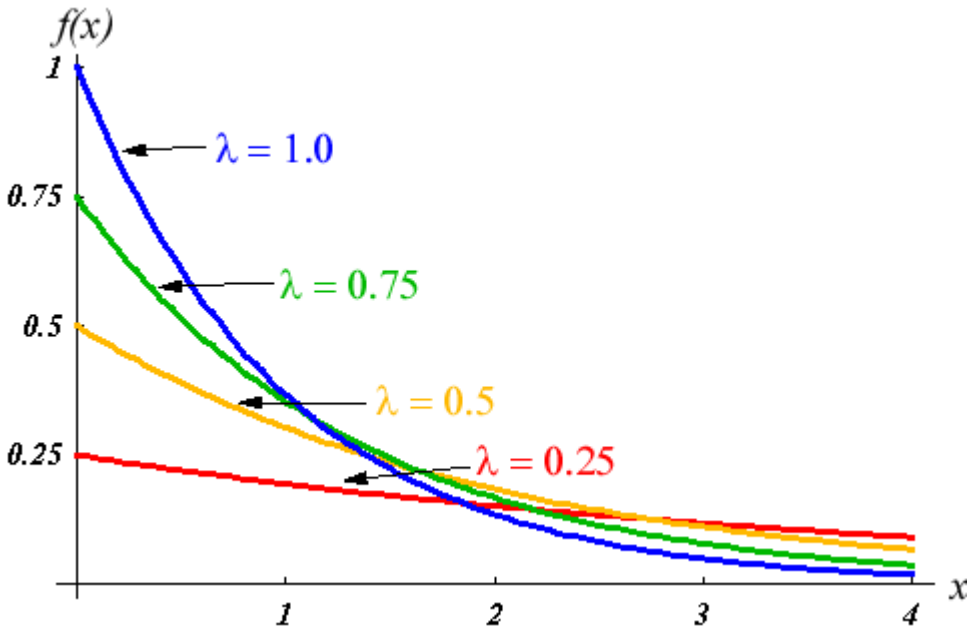
λ = durchschnittliche Ankunftsrate pro Zeiteinheit (z.B. Minuten, Stunden, Tage)
t = Zeitabstand zwischen 2 Ankünften
e = 2.718...

Verteilungsfunktion: $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ $\quad t \geq 0$

Mittelwert: $1/\lambda$

Varianz: $1/\lambda^2$

Exponentialverteilung: Beispiele



Poissonverteilung (diskret)

Dichtefunktion:

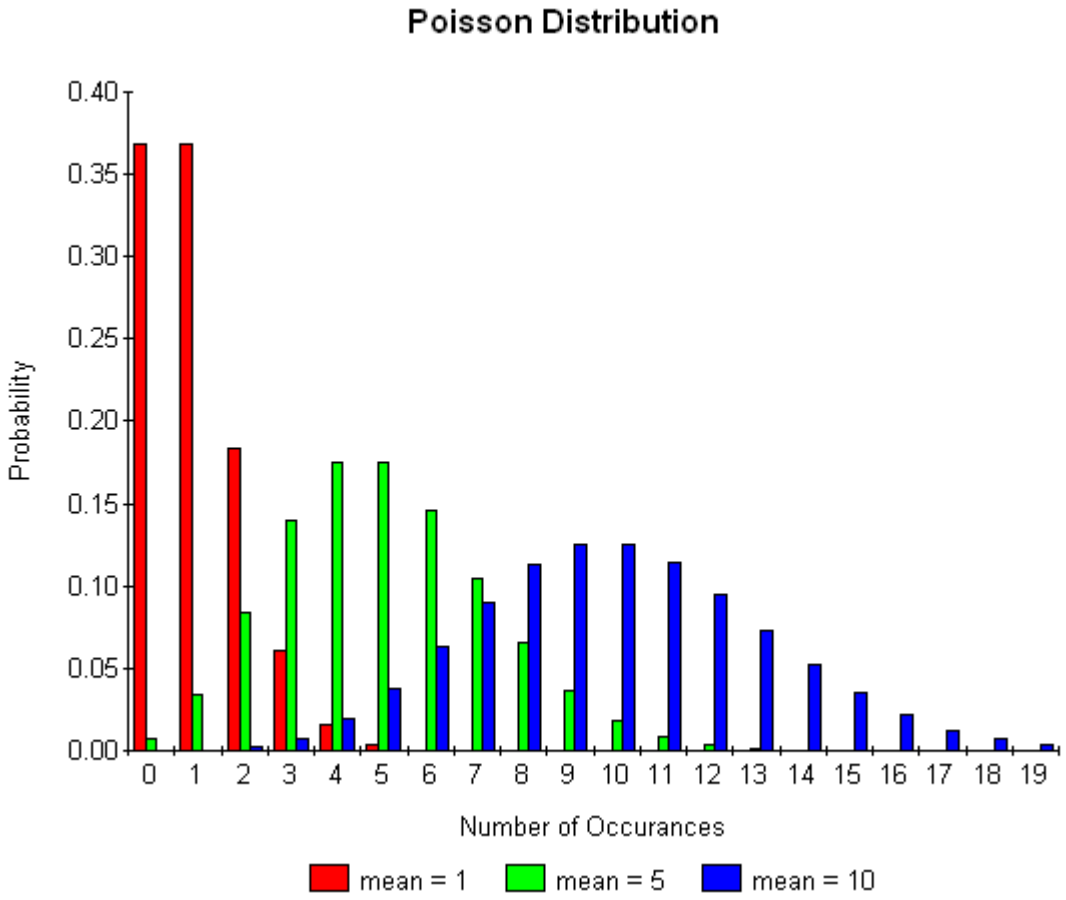
$$f(n) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

λ = durchschnittliche Ankunftsrate pro Zeiteinheit (z.B. Minuten, Stunden, Tage)
t = Anzahl der Zeitperioden (i.d.R. 1)
n = Anzahl der Ankünfte (0, 1, 2, ...)
e = 2.718...

Mittelwert: λt

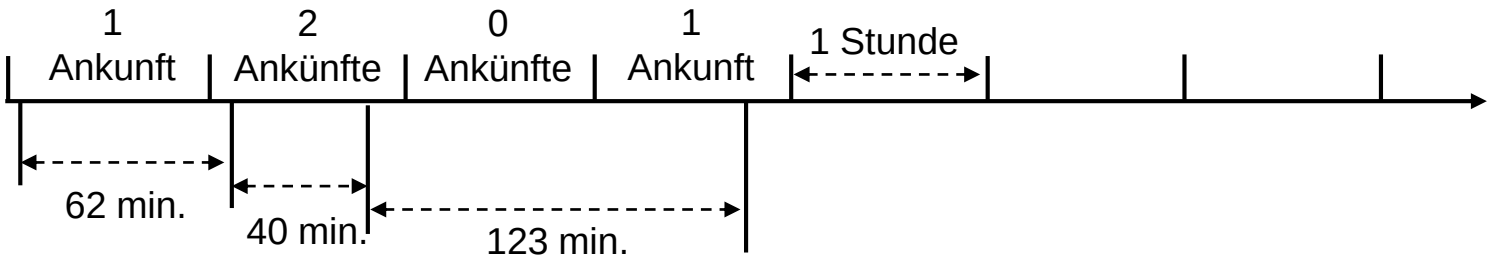
Varianz: λt

Poissonverteilung: Beispiele



Äquivalenz zwischen Poisson- und Exponentialverteilung

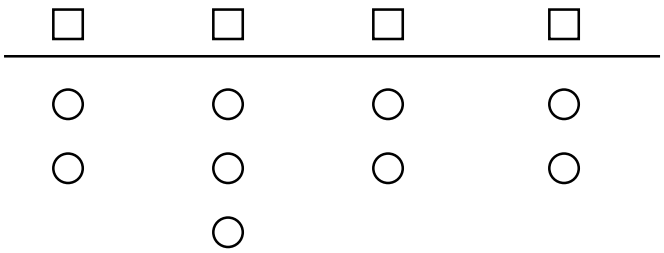
Poissonverteilung für die Anzahl der Ankünfte pro Stunde (oben)



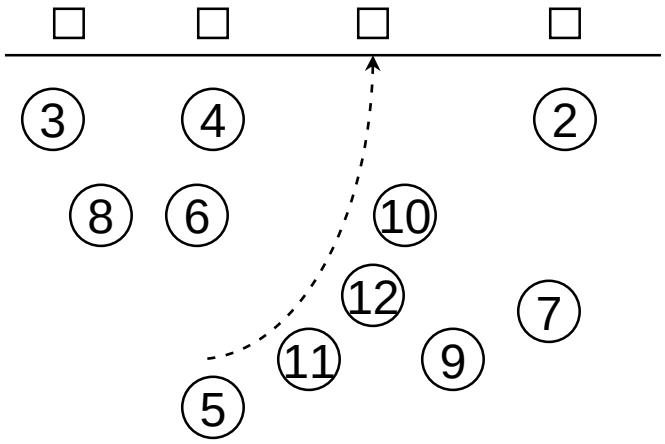
Exponentialverteilung der Zeitabstände zwischen 2 Ankünften in Minuten (unten)

Warteschlangenkonfiguration

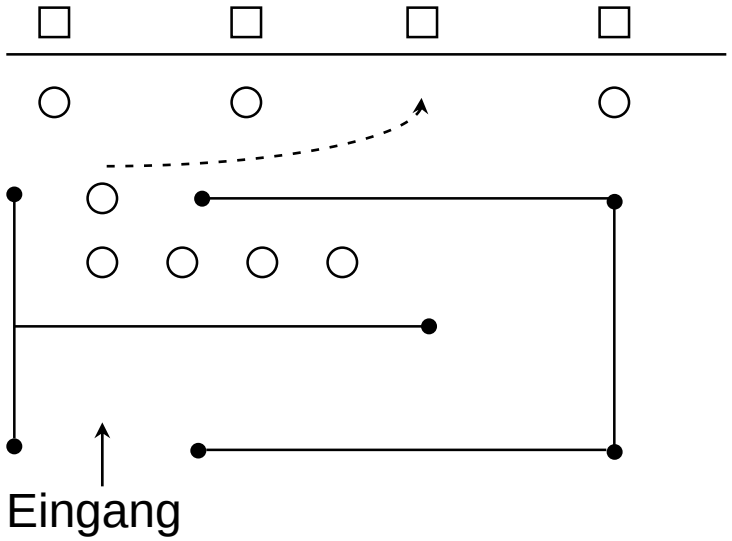
Mehrere Warteschlangen



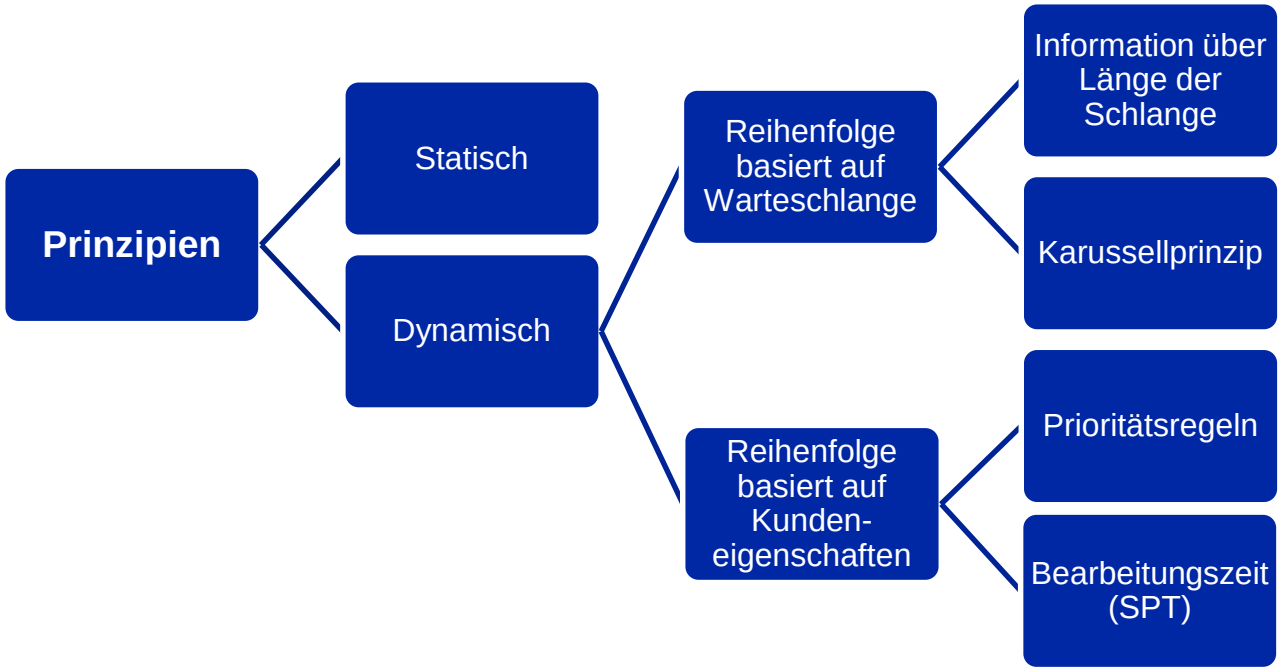
Nummernsystem



Eine Warteschlange



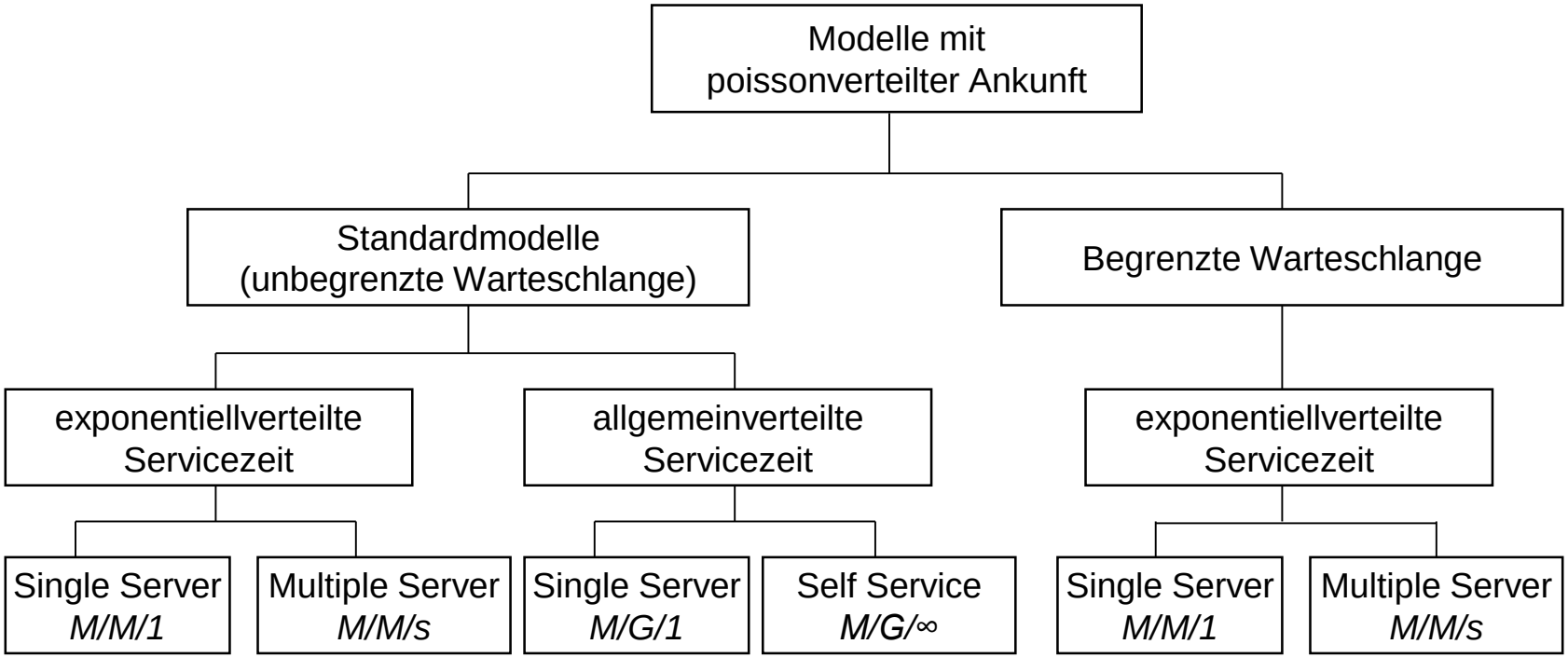
Reihenfolge



Serviceanordnung

Servicefacility	Serveranordnung
Parkplatz	Selbstbedienung
Cafeteria	Server hintereinander
Mautstelle	Server parallel
Supermarkt	Selbstbedienung (1. Stufe); Parallel Server (2. Stufe)
Krankenhaus	Viele Servicecenter (parallel und hintereinander)

Warteschlangenmodelle im Überblick



A/B/s Notation: *A* beschreibt die Verteilung der Zeitabstände zwischen 2 Ankünften, *B* beschreibt die Verteilung der Servicezeit und *s* (oder *c*) die Anzahl der Server.
M beschreibt die Exponentialverteilung, *G* irgendeine allgemeine Verteilung (z.B. Normalverteilung, Gleichverteilung, etc.)

Standard M/M/1-Modell

Voraussetzungen:

- Unbegrenzte oder sehr große Menge potentieller Kunden
- Zeitabstände zwischen 2 Ankünften sind negativ exponentialverteilt bzw. Ankunftsrate ist poissonverteilt
- Eine unbegrenzte Warteschlange ohne Abwanderung von Kunden
- FCFS
- Ein Server mit negativ exponentiell verteilter Servicezeit bzw. poissonverteilter Servicerate
- $\lambda < \mu$

M/M/1

Poissonverteilte Ankunfts- und Servicerate: $\lambda < \mu$

Durchschnittliche Ankunftsrate: λ

Durchschnittliche Servicerate: μ

Durchschnittlicher Auslastungsgrad: $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

Wahrscheinlichkeit, dass sich genau n Kunden im System befinden: $P_n = \rho^n (1 - \rho)$

Wahrscheinlichkeit, dass sich k oder mehr Kunden im System befinden: $P(n \geq k) = \rho^k$

M/M/1

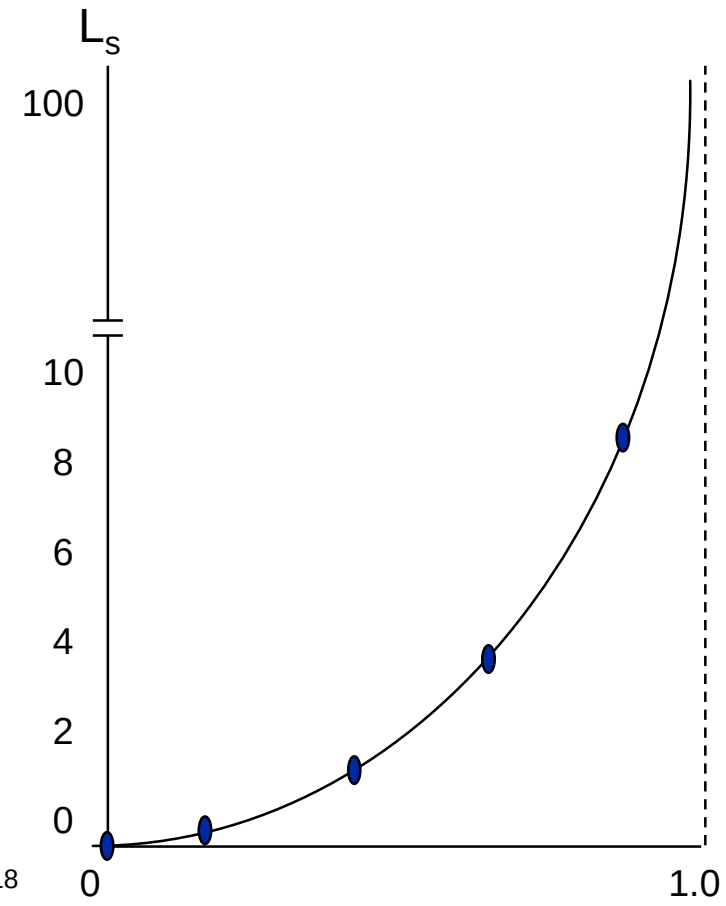
Durchschnittliche Anzahl von Kunden im System: $$L_S = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

Durchschnittliche Länge der Warteschlange: $$L_q = \frac{\rho\lambda}{\mu - \lambda}$$

Durchschnittliche Verweildauer im System: $$W_s = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

Durchschnittliche Verweildauer in der Warteschlange: $$W_q = \frac{\rho}{\mu - \lambda}$$

Wie ändert sich L_S, wenn $\rho \to 1$ bzw. $\rho \to 0$?



$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$L_s = \frac{\rho}{1-\rho}$$

ρ	L_s
0	0
0.2	0.25
0.5	1
0.8	4
0.9	9
0.99	99

Beispiel 1: Eisverkäufer

- Pro Stunde kommen durchschnittlich 80 Kunden.
- Der Verkäufer benötigt je Kunde durchschnittlich 30 Sekunden.
- Ankunftsrate der Kunden ist poissonverteilt.
- Servicerate ist poissonverteilt.

Fragen zum Eisverkäufer-Beispiel

1. Wie hoch ist der durchschnittliche Auslastungsgrad des Eisverkäufers?
2. Wie lang ist die durchschnittliche Warteschlange vor dem Eisverkäufer?
3. Wie viele Kunden befinden sich durchschnittlich im „System“ (Warteschlange + Bedienung)?
4. Wie lange verweilt ein Kunde durchschnittlich in der Warteschlange (durchschnittliche Wartezeit)?
5. Wie lange verweilt ein Kunde durchschnittlich im „System“ (durchschnittliche Verweilzeit)?

Eisverkäufer-Beispiel

1. Durchschnittlicher Auslastungsgrad des Eisverkäufers

$$\lambda = 80\ Kunden/Stunde$$

$$\mu = \frac{1\ Kunde}{30\ Sekunden\ (1\ Stunde/3600\ Sekunden)} = 120\ Kunden/Stunde$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{80\ Kunden/Stunde}{120\ Kunden/Stunde} = 0.67 = 67\%$$

Eisverkäufer-Beispiel

2. Durchschnittliche Länge der Warteschlange

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{80^2}{120(120 - 80)} = 1.33$$

3. Durchschnittliche Anzahl der Kunden im System

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{80}{120 - 80} = 2$$

Eisverkäufer-Beispiel

4. Durchschnittliche Wartezeit

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{80}{120(120 - 80)} = \frac{1}{60}\,\text{Stunde} = 1\,\text{Minute}$$

5. Durchschnittliche Verweilzeit

$$W_s = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{120 - 80} = \frac{1}{40}\,\text{Stunde} = 1.5\,\text{Minuten}$$

M/M/1-Modell mit begrenzter Warteschlange

Eisverkäuferbeispiel:

- Eisverkäufer möchte einen McIce Drive-in Kiosk betreiben.
- Wie viele Autos müssen in der Drive-in-Schlange mindestens Platz haben, damit mit mehr als 90%iger Wahrscheinlichkeit keine Autos auf der Strasse warten müssen?

- Lösung: $P(n \geq k) = \rho^k$

$$P(n \geq 5) = \rho^5 = 0.13$$
$$P(n \geq 6) = \rho^6 = 0.09$$

- Mit Platz für sechs Autos im System (fünf in der Schlange und eines in Bedienung) beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Auto auf der Strasse warten muss 9%.

- Antwort: In der Drive-in-Schlange müssen mindestens fünf Autos Platz haben.

M/G/1-Modell

$$L_q = \frac{\rho^2 + \lambda^2 \sigma^2}{2(1-\rho)}$$

1. Für Exponentialverteilung gilt:

$$\sigma^2 = \frac{1}{\mu^2} \rightarrow L_q = \frac{\rho^2 + \lambda^2/\mu^2}{2(1-\rho)} = \frac{2\rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{\rho^2}{(1-\rho)}$$

2. Bei konstanter Servicezeit gilt:

$$\sigma^2 = 0 \rightarrow L_q = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}$$

3. Hieraus folgt, dass die durchschnittliche Länge der Warteschlange (L_q) jeweils zur Hälfte durch die Varianz der Ankünfte sowie die Varianz der Servicezeit erklärt wird.

Standard-M/M/s-Modell

Voraussetzungen:

- Wie bei Standard M/M/1-Modell (u.a. eine unbegrenzte Warteschlange und FCFS)
- Servicerate der Server ist unabhängig und identisch verteilt
- $\lambda < s\mu$ bzw. $\lambda/\mu = \rho < s$

mms.xls M/M/s Queueing Formula Spreadsheet

Inputs:

lambda	80
mu	120

Definitions of terms:

lambda = arrival rate
mu = service rate
s = number of servers
Lq = average number in the queue
Ls = average number in the system
Wq = average wait in the queue
Ws = average wait in the system
P(0) = probability of zero customers in the system
P(delay) = probability that an arriving customer has to wait

Outputs:

s	Lq	Ls	Wq	Ws	P(0)	P(delay)	Utilization
0							
1	1,3333	2,0000	0,0167	0,0250	0,3333	0,6667	0,6667
2	0,0833	0,7500	0,0010	0,0094	0,5000	0,1667	0,3333
3	0,0093	0,6760	0,0001	0,0084	0,5122	0,0325	0,2222
4	0,0010	0,6677	0,0000	0,0083	0,5133	0,0051	0,1667
5	0,0001	0,6668	0,0000	0,0083	0,5134	0,0007	0,1333
6	0,0000	0,6667	0,0000	0,0083	0,5134	0,0001	0,1111
7	0,0000	0,6667	0,0000	0,0083	0,5134	0,0000	0,0952
8	0,0000	0,6667	0,0000	0,0083	0,5134	0,0000	0,0833
9	0,0000	0,6667	0,0000	0,0083	0,5134	0,0000	0,0741
10	0,0000	0,6667	0,0000	0,0083	0,5134	0,0000	0,0667

Beispiel: Fahrkartenautomat

Pro Stunde kommen durchschnittlich 20 Kunden

Servicemanager hat die Wahl zwischen

- Einem modernen Hochleistungsautomaten (bedient durchschnittlich 2 Kunden pro Minute)
- Zwei alten Automaten (bedienen jeweils durchschnittlich 1 Kunden pro Minute)

Fahrkartenbeispiel: 1 Hochleistungsautomat

mms.xls M/M/s Queueing Formula Spreadsheet

Inputs:

lambda	20
mu	120

Definitions of terms:

lambda = arrival rate
mu = service rate
s = number of servers
Lq = average number in the queue
Ls = average number in the system
Wq = average wait in the queue
Ws = average wait in the system
P(0) = probability of zero customers in the system
P(delay) = probability that an arriving customer has to wait

Outputs:

s	Lq	Ls	Wq	Ws	P(0)	P(delay)	Utilization
0							
1	0,0333	0,2000	0,0017	0,0100	0,8333	0,1667	0,1667
2	0,0012	0,1678	0,0001	0,0084	0,8462	0,0128	0,0833

Fahrkartenbeispiel: 2 Altautomaten

mms.xls M/M/s Queueing Formula Spreadsheet

Inputs:

lambda	20
mu	60

Definitions of terms:

lambda = arrival rate
mu = service rate
s = number of servers
Lq = average number in the queue
Ls = average number in the system
Wq = average wait in the queue
Ws = average wait in the system
P(0) = probability of zero customers in the system
P(delay) = probability that an arriving customer has to wait

Outputs:

s	Lq	Ls	Wq	Ws	P(0)	P(delay)	Utilization
0							
1	0,1667	0,5000	0,0083	0,0250	0,6667	0,3333	0,3333
2	0,0095	0,3429	0,0005	0,0171	0,7143	0,0476	0,1667
3	0,0006	0,3340	0,0000	0,0167	0,7164	0,0050	0,1111

Trade-offs

2 Altautomaten

- L_q = 0.0095
- L_s = 0.3429
- W_q = 0.0005
- W_s = 0.0171
- P(0) = 71%
- P(Delay) = 4.8%
- Auslastungsgrad = 16.7%

1 Hochleistungsautomat

- L_q = 0.0333
- L_s = 0.2
- W_q = 0.0017
- W_s = 0.01
- P(0) = 83%
- P(Delay) = 16.7%
- Auslastungsgrad = 16.7%

Service-Pooling

- Prinzip: Eine statt mehrere Warteschlangen
- Bessere Auslastung der Server
- Beispiele: Postschalter, Sekretärinnenpool
- Nachteil: „Lange“ Warteschlange schreckt evtl. Kunden ab
- Trade-off zwischen Transport- und Wartekosten bei Pooling über mehrere Standorte (1 zentraler Serverpool vs. mehrere dezentrale Server)

M/M/s-Modell mit begrenzter Warteschlange

- Analog zu M/M/1-Modell mit begrenzter Warteschlange
- N = Maximale Kundenzahl im System > s
- Neu ankommender Kunde wird zurückgewiesen, wenn mehr als N-s Kunden warten oder mehr als N Kunden im System sind
- Sonderfall: N - s = 0 (Keine Wartemöglichkeit)
- Beispiel: Parkplatz (jeder Parkplatz ist ein Server)

M/G/∞-Modell

Bei diesem Modell muss kein Kunde warten, da es unendlich viele Server gibt.

Beispiel: Selbstbedienung

Die Anzahl der Kunden im System ist poissonverteilt gemäß

$$P_n = \frac{e^{-\rho}}{n!}\rho^n$$

Es gilt $L_s = \rho$

Kostenminimierung

Gesamtkosten/Stunde = Wartekosten/Stunde + Servicekosten/Stunde

$$TC = C_w \lambda W_s + sC_s = C_w L_s + sC_s$$

C_w = Opportunitätskosten/Stunde eines Kunden

λ = durchschnittliche Ankunftsrate

W_s = durchschnittliche Verweilzeit im System

C_s = Serverkosten/Stunde

s = Serverzahl

Achtung: Gilt nur für Systeme mit $s > \rho = \lambda/\mu$

Beispiel: Workstation Miete

- Ein Ingenieurbüro plant Workstations für die Durchführung von Statikanalysen anzumieten
- Durchschnittlich führt ein Ingenieur 8 Statikanalysen pro Stunde durch (poissonverteilt)
- Eine Statikanalyse dauert durchschnittlich 15 Minuten (exponentialverteilt)
- Die Mietkosten betragen je Workstation 10$/h
- Der Stundenlohn eines Ingenieurs beträgt 30$/h

Workstation-Beispiel

Berechnung: M/M/s-Modell mit $\rho = 8/4 = 2$

s	L_q	$C_w L_q$	sC_s	TC
3	0.88	26.4	30	56.4
4	0.17	5.1	40	45.1
5	0.04	1.2	50	51.2
6	0.01	0.3	60	60.3

Achtung: Hier wird mit L_q anstatt L_s gerechnet, da die Ingenieure an der Workstation bereits produktiv sind!