Universität
Zürich[UZH]

Institut für Betriebswirtschaftslehre

Operations Management

Kurzfristige Kapazitätsplanung &

Warteschlangenmanagement

Aufgabe 1 – Lösung/1

$$a)\ \ \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{15}{20} = 0.75$$

$$b)\ \ L_q = \frac{\rho\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{0.75 * 15}{20 - 15} = 2.25\ Kunden$$

$$c)\ \ L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{15}{20 - 15} = 3\ Kunden$$

$$d)\ \ W_q = \frac{\rho}{\mu - \lambda} = \frac{0.75}{20 - 15} = 0.15\ Stunden = 0.15 * 60 = 9\ Minuten$$

Aufgabe 1 – Lösung/2

e) $W_s = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{20-15} = 0.2\ Stunden = 0.2 * 60 = 12\ Minuten$

f) $P_n = \rho^n (1-\rho)$

$$n = 0 \Rightarrow P_o = \rho^0 (1-\rho)$$

$$\Rightarrow (1-\rho) = 0.9 \Rightarrow \rho = 0.1$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \Rightarrow \mu = \frac{\lambda}{\rho} = \frac{15}{0.1} = 150\ Kunden\ pro\ Stunde$$

Aufgabe 2 – Lösung/1

a) Die Ankunftsrate beträgt: $\lambda = 30 \frac{Kunden}{h}$.

Die Servicerate beläuft sich auf: $\mu = \frac{3600\ sek/h}{20\ sek/Kunden} = 180 \frac{Kunden}{h}$.

Was einen Auslastungsgrad von $\rho = \frac{30\ Kunden/h}{180\ Kunden/h} = 0.167$ ergibt.

b) Daraus lässt sich die durchschnittliche Anzahl an Kunden im System folgendermassen berechnen:

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{30}{180 - 30} = 0.2\ Kunden$$

Aufgabe 2 – Lösung/2

c) Um den Einfluss einer Veränderung der Ankunftsrate auf die Anzahl der Kunden im System zu ermitteln, wird die Ableitung von L_s nach λ gebildet. Beachten Sie dabei die Quotientenregel der Differentialrechnung:

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow\Rightarrow h'(x) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\frac{\partial L_S}{\partial \lambda} = \frac{\partial \left(\frac{\lambda}{\mu - \lambda}\right)}{\partial \lambda} = \frac{1 * (\mu - \lambda) - \lambda * (-1)}{(\mu - \lambda)^2} = \frac{\mu}{(\mu - \lambda)^2} > 0$$

Da dieser Term positiv ist, steigt die Anzahl an Kunden im System, wenn die Ankunftsrate steigt.

Aufgabe 3 – Lösung/1

a) Da die Kunden die Warteschlange nicht wechseln können, wird mit zwei M/M/1 Modellen gerechnet. Die Ankunftsrate pro Server beläuft sich somit auf 10 Kunden/h.

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10\ Kunden/h}{20\ Kunden/h} = 0.5$$

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{10\ Kunden/h}{20\ Kunden/h - 10\ Kunden/h} = 1\ Kunde$$

$$TC_{Schalter} = C_W L_S + s\ C_S$$

$$= 15 \frac{CHF}{h * Kunden} * 1\ Kunde + 10 \frac{CHF}{h * Server} * 1\ Server = 25 \frac{CHF}{h}$$

Somit belaufen sich die Gesamtkosten auf:

$$2 * TC_{Schalter} = 2 * 25 \frac{CHF}{h} = 50 \frac{CHF}{h}$$

Aufgabe 3 – Lösung/2

b) Gesamtkosten ergeben sich aus den Kosten für den Schalter (in Teilaufgabe a) berechnet) sowie den Kosten für den ATM (M/G/1), welche sich wie folgt zusammensetzen:

$$TC_{ATM} = C_W L_S + s\, C_S$$

Die durchschnittliche Anzahl Kunden im System (L_s) ergibt sich aus der Summe der durchschnittlichen Anzahl Kunden in der Warteschlange (L_q) sowie der durchschnittlichen Anzahl Kunden in Service ($\rho = 0.5$). Da der ATM über eine konstante Servicezeit verfügt, liegt die Varianz bei Null ($\sigma^2 = 0$):

$$L_q = \frac{\rho^2 + \lambda^2\sigma^2}{2(1-\rho)} = \frac{0.5^2}{2(1-0.5)} = 0.25\ Kunden$$

$$L_s = L_q + \rho = 0.25 + 0.5 = 0.75\ Kunden$$

$$TC_{ATM} = 15\,\frac{CHF}{h * Kunden} * 0.75 + 1 * 0\,\frac{CHF}{h} = 11.25\ \frac{CHF}{h}$$

Aufgabe 3 – Lösung/3

Somit belaufen sich die Gesamtkosten auf:

$$TC = TC_{Schalter} + TC_{ATM} = 25\ \frac{CHF}{h} + 11.25\ \frac{CHF}{h} = 36.25\ \frac{CHF}{h}$$

Ein Vergleich zwischen a) und b) zeigt auf, dass der ATM anstelle eines zweiten Schalters die billigere Variante ist.

Aufgabe 4 – Lösung/1

a) Ausgehend von einem M/M/1-Modell werden zunächst λ und μ bestimmt sowie ρ berechnet. Da sich die Kunden auf die beiden Schalter aufteilen, ergibt sich pro Schalter eine Ankunftsrate von:

$$\lambda = 20 \frac{Kunden}{h}$$

$$\mu = \frac{3600\ sek/h}{72\ sek} = 50 \frac{Kunden}{h}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{20\ Kunden/h}{50\ Kunden/h} = 0.4$$

Daraus kann nun die Anzahl Kunden im System (Schalter) berechnet werden:

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{20}{50-20} = 0.67\ Kunden$$

Woraus sich eine Anzahl von 1.33 Kunden für beide Schalter ergibt.

Aufgabe 4 – Lösung/2

b) Nun wird von einem M/M/c-Modell mit c=2 ausgegangen. Die ankommenden Kunden bilden nur noch eine Warteschlange.

$$\lambda = 40\ \ Kunden/h$$

$$\mu = \frac{3600\ sek/h}{72\ sek} = 50\,\frac{Kunden}{h}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{40\ Kunden/h}{50\ Kunden/h} = 0.8$$

Die Warteschlange verkürzt sich auf (siehe Tabelle Seite 11 Aufgabenstellung):

$$L_q = \ L_s - \rho$$

$$L_s = L_q + \rho = 0.152 + 0.8 = 0.952\ Kunden$$

Vergleich: Bei b) sind weniger Kunden im System, da die Kunden in a) die Schlangen nicht wechseln dürfen und es daher sein kann, dass ein Server nicht ausgelastet ist.

Aufgabe 5 – Lösung

Es wird mit einem M/M/1-Modell gerechnet, wobei zunächst der Auslastungsgrad berechnet wird. Die Ankunftsrate λ beträgt *2 Kunden/h*, während sich die Servicerate μ auf *4 Kunden/h* beläuft.

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2\ Kunden/h}{4\ Kunden/h} = 0.5$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass sich 3 (1 beim Schneiden + 2 auf den Stühlen) oder mehr Kunden im System befinden und somit die zusätzlich ankommenden stehend warten müssen, beläuft sich auf:

$$P(n \geq 3) = \rho^3 = 0.5^3 = 0.125 = 12.5\%$$

Aufgabe 6 – Lösung

Bei einem M/G/∞-Modell muss kein Antragsteller warten, da es unendlich viele “Server” gibt. Die Länge der Warteschlange entspricht folglich $L_q = 0$.

Aufgabe 7 – Lösung/1

a)

M/M/1	2010	2011
λ	1.8	3.9
μ	4	4
s	1	1
ρ	45 %	97.50 %
P_0	0.55	
L_q	0.3682	38.0250
L_s	0.8182	
W_q	0.2045	9.7500
W_s	0.4545	
$P(n \geq 1)$	0.45	

Auslastungsgrad:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1.8}{4} = 0.45 = 45\%$$

Wahrscheinlichkeit, dass sich kein Kunde im System befindet:

$$P_0 = \rho^0(1-\rho)$$
$$= 0.45^0(1-0.45) = 0.55$$

Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde warten muss:

$$P(n \geq 1) = \rho^1 = 0.45^1 = 0.45$$

Aufgabe 7 – Lösung/2

a)

M/M/1	2010	2011
λ	1.8	3.9
μ	4	4
s	1	1
ρ	45 %	97.50%
P_0	0.55	0.025
L_q	0.3682	38.0250
L_s	0.8182	39
W_q	0.2045	9.7500
W_s	0.4545	10
$P(n\geq1)$	0.45	0.975

Wahrscheinlichkeit, dass sich kein Kunde im System befindet:

$$P_0 = \rho^0(1-\rho)$$
$$= 0.975^0(1-0.975) = 0.025$$

Durchschnittliche Anzahl an Kunden im System:

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{3.9}{4-3.9} = 39\ Kunden$$

Durchschnittliche Wartezeit in Tagen:

$$W_s = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{4-3.9} = 10\ Tage$$

Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde warten muss:

$$P(n \geq 1) = \rho^1 = 0.975^1 = 0.975$$

Aufgabe 7 – Lösung/3

b) Die Servicerate bleibt konstant, also ist die Kritik an der Arbeitsleistung der Mitarbeiterin ungerechtfertigt.