



Universität  
Zürich<sup>UZH</sup>

Institut für Betriebswirtschaftslehre

# Operations Management

Kurzfristige Kapazitätsplanung, Warteschlangenmanagement

Prof. Dr. Helmut Dietl





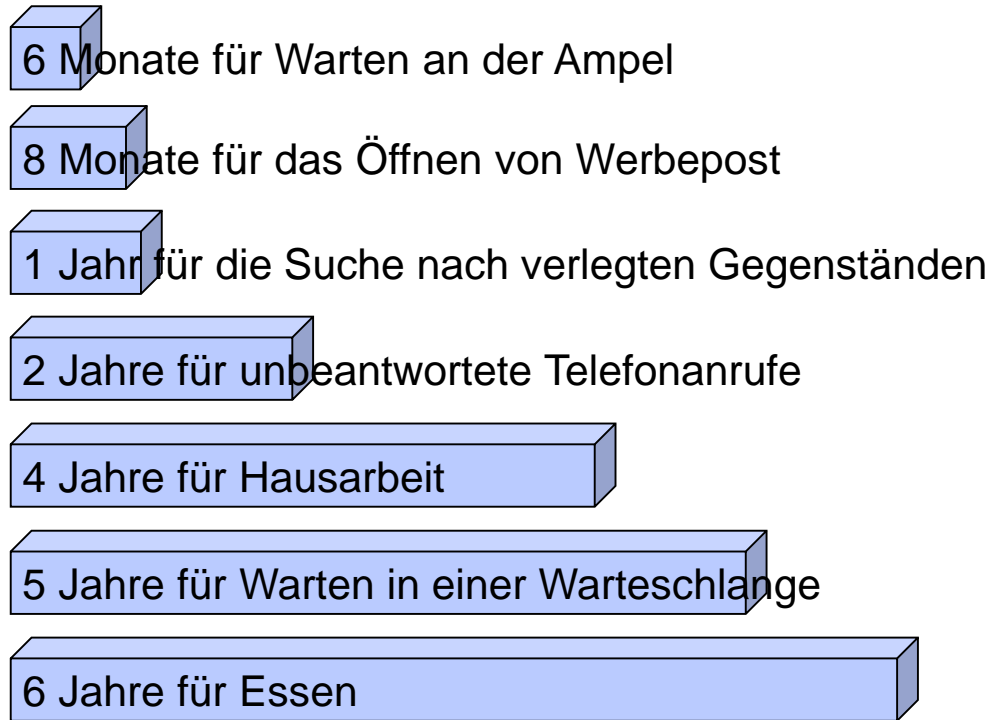
## Lernziele

Nach dieser Veranstaltung sollen Sie wissen,

- welcher Trade-off zwischen Warte- und Servicekosten besteht
- wovon das subjektive Wartezeitempfinden abhängt und wie es sich beeinflussen lässt
- aus welchen Grundelementen ein Warteschlangensystem besteht
- inwieweit poissonverteilte Ankunftsraten dem exponentiellverteilten Zeitabstand zwischen 2 Ankünften entsprechen
- wie man die wichtigsten Warteschlangenmodelle anwendet
- wie die wichtigsten Performancekriterien von Warteschlangensystemen berechnet werden können
- inwiefern Kapazitätsentscheidungen auf der Basis von Warteschlangenmodellen getroffen werden können

## Wie zerrinnt unsere Zeit?

So viel Zeit unseres Lebens verwenden wir für ...



Quelle: U.S. News & World Report, 30.1.1989, S. 81





## Wartephänomene

### **Unausweichlichkeit:**

Wartezeit ist das unausweichliche Ergebnis unterschiedlicher Veränderungen bei der Ankunftsrate und der Servicerate

### **Warteökonomik:**

Hohe Serverauslastung kann nur durch Wartezeiten der Kunden erkaufte werden → Trade-off zwischen Auslastung und Wartezeit

### **Auswege:**

- Produktive Wartezeit (Salatbuffet)
- Profitable Wartezeit (Empfangsbar)



## 2 Komponenten des Warteschlangenmanagements

### Tatsächliche Wartezeit

- Objektiv
- Messbar
- Warteschlangenmodelle

### Beispiel:

- Verringerung der tatsächlichen Wartezeit durch zusätzlichen Hotelaufzug

### Empfundene Wartezeit

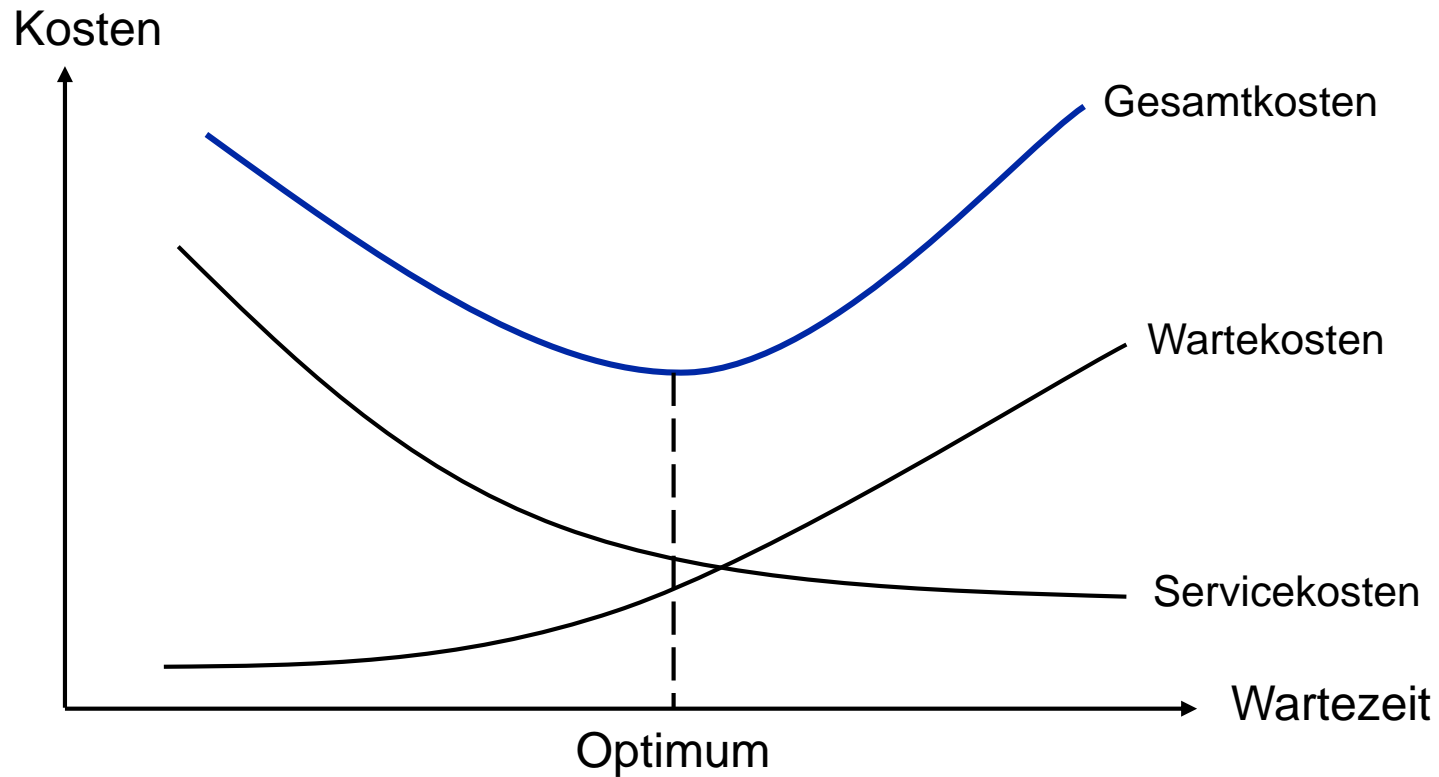
- Subjektiv
- Nicht messbar
- Psychologische Studien

### Beispiel:

- Verringerung der empfundenen Wartezeit durch Spiegel vor den Hotelaufzügen

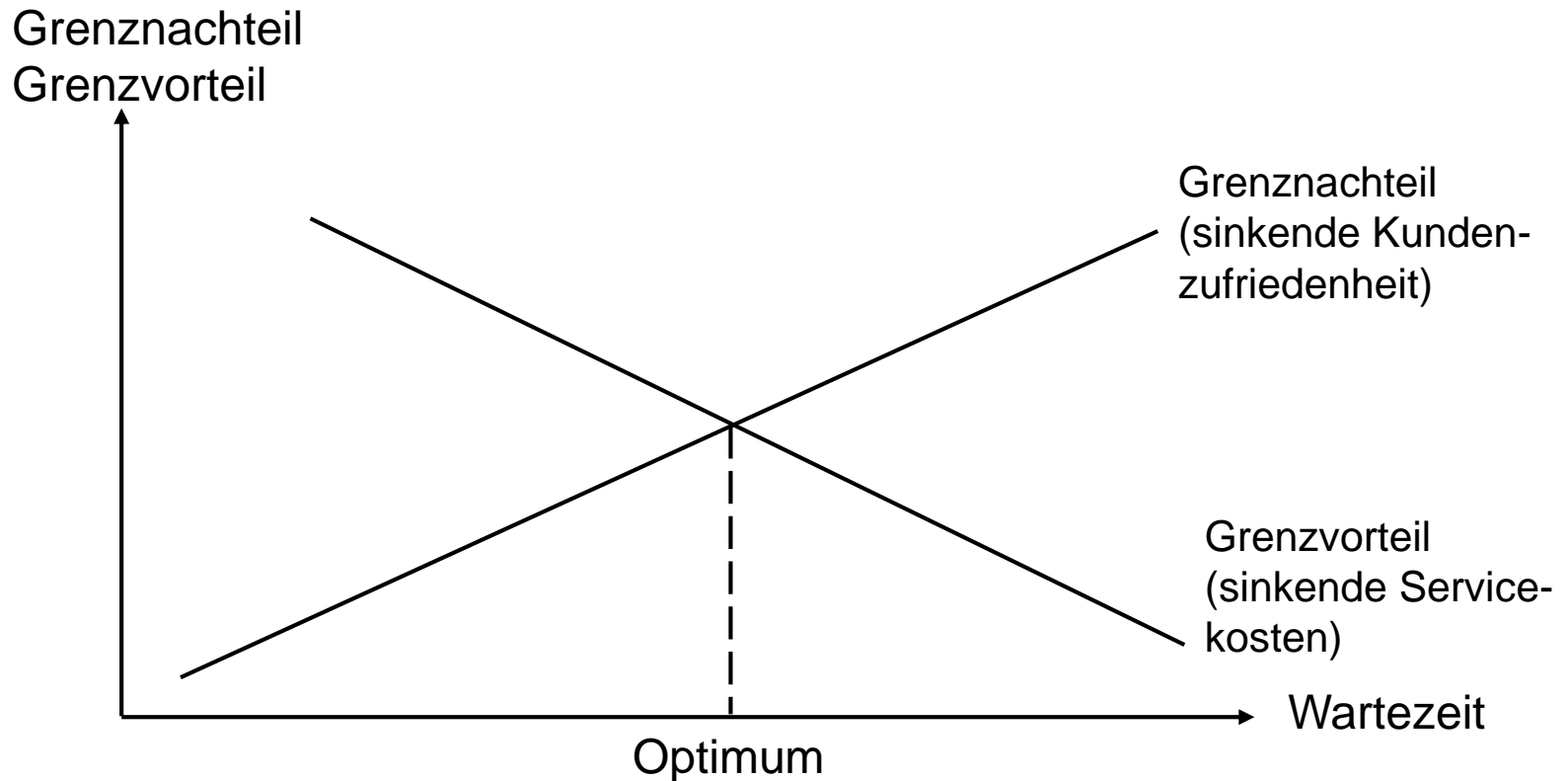


## Trade-off im Warteschlangenmanagement



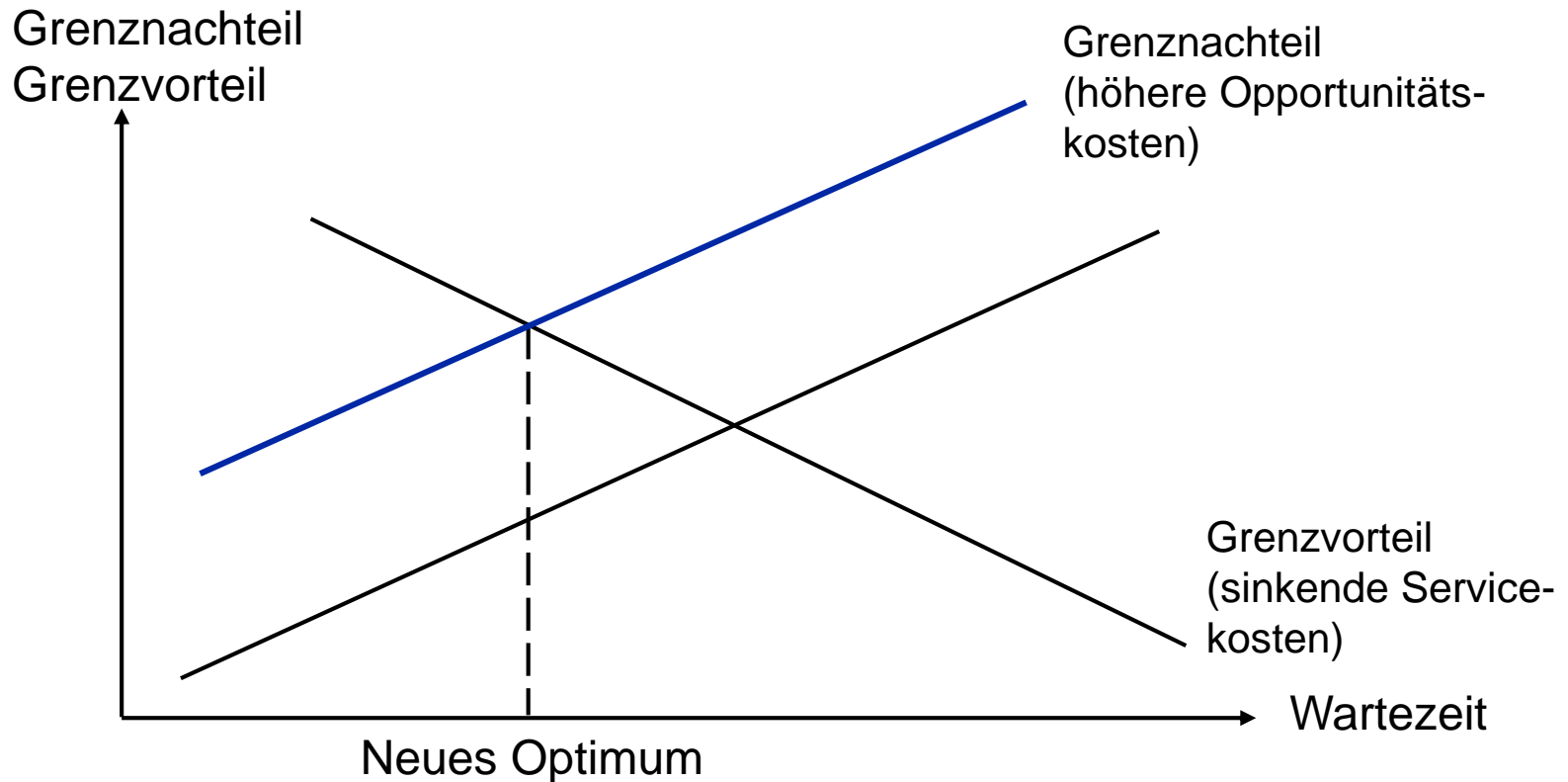


## Trade-off Optimierung





## Trade-off und Opportunitätskosten







## Warteschlangenpsychologie

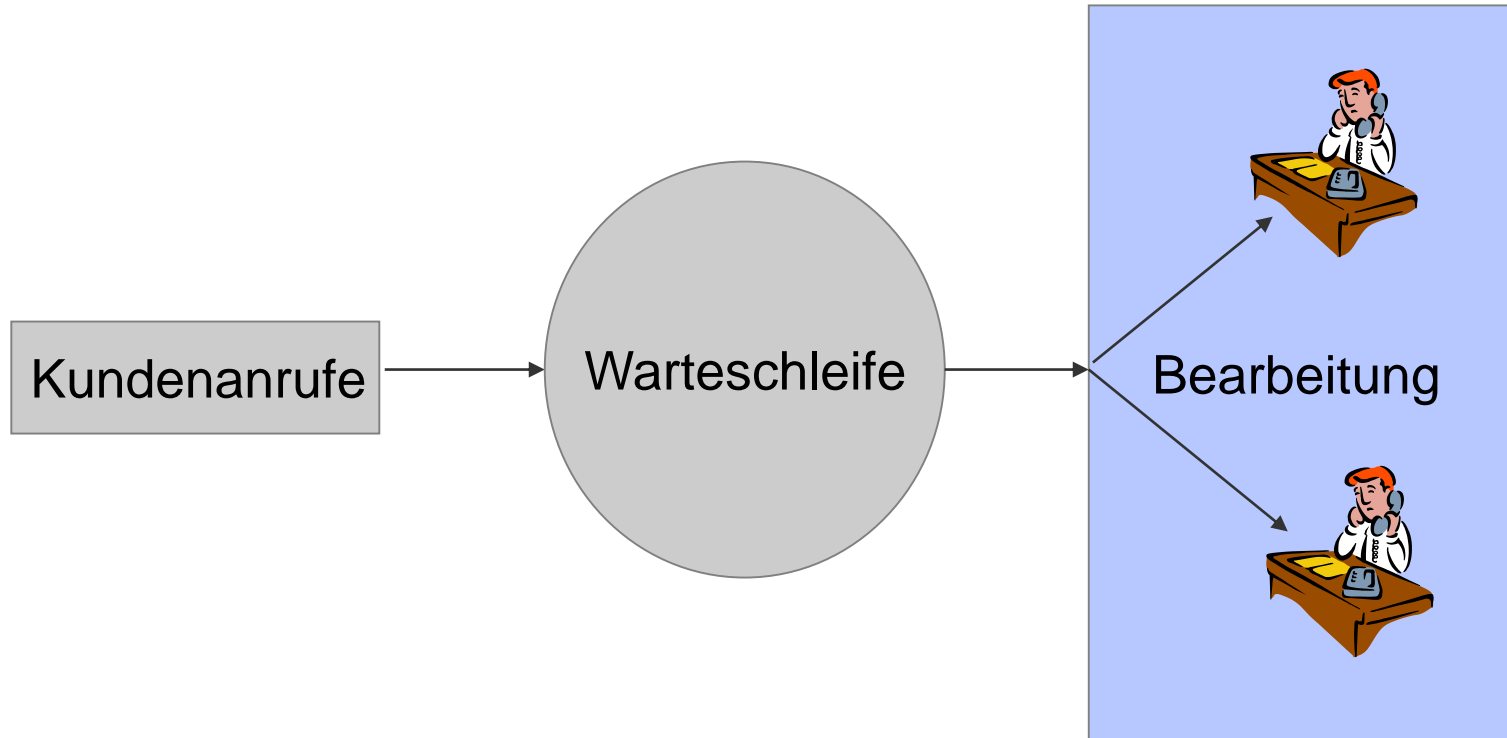
<b>Subjektives Zeitempfinden länger</b>	<b>Subjektives Zeitempfinden kürzer</b>
Warten ohne Ablenkung/Beschäftigung	Warten mit Ablenkung/Beschäftigung
Unerwartete Wartezeit	Geplante Wartezeit
Allein warten	In der Gruppe warten
Wartezeit außerhalb des Serviceprozesses	Wartezeit innerhalb des Serviceprozesses
Besorgtes Warten	Entspanntes Warten



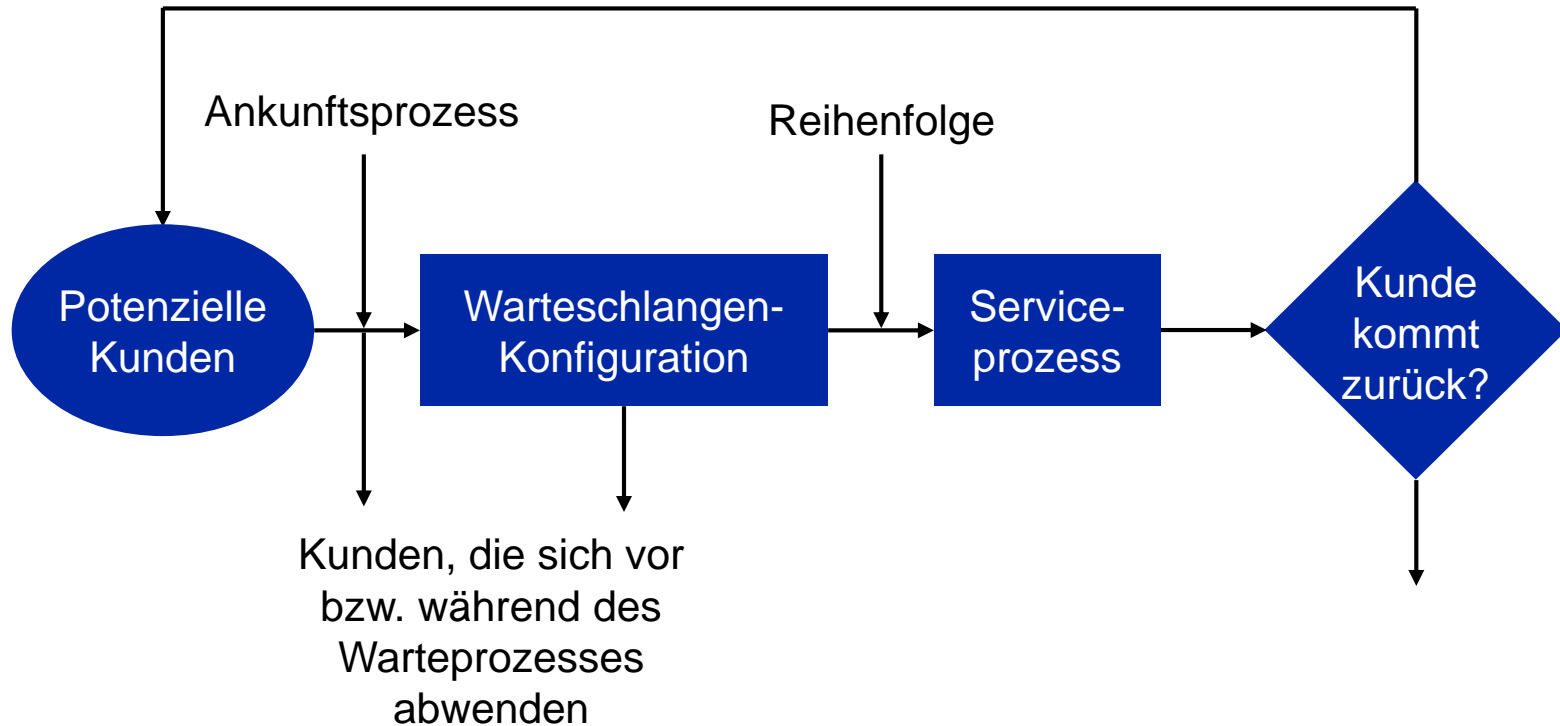
## Verringerung der empfundenen Wartezeit

- Gerechte vs. ungerechte Wartezeiten  
Nummern- und Einschlangensystem (aber: Supermarkt), keine Telefonanrufe!
- Bequeme vs. unbequeme Wartezeiten  
Empfangsbar in Restaurants, Bestuhlung, Unterhaltung
- Erklärte vs. unerklärte (besorgniserregende) Wartezeit  
Abflugverzögerung wegen Enteisierung der Tragflächen
- Beschäftigtes vs. beschäftigungsloses Warten  
Wartelounge mit Fax- und Internetanschluss
- Wartezeiten außerhalb vs. innerhalb des Systems  
Vorprogramm im Kino

# Warteschlangensysteme

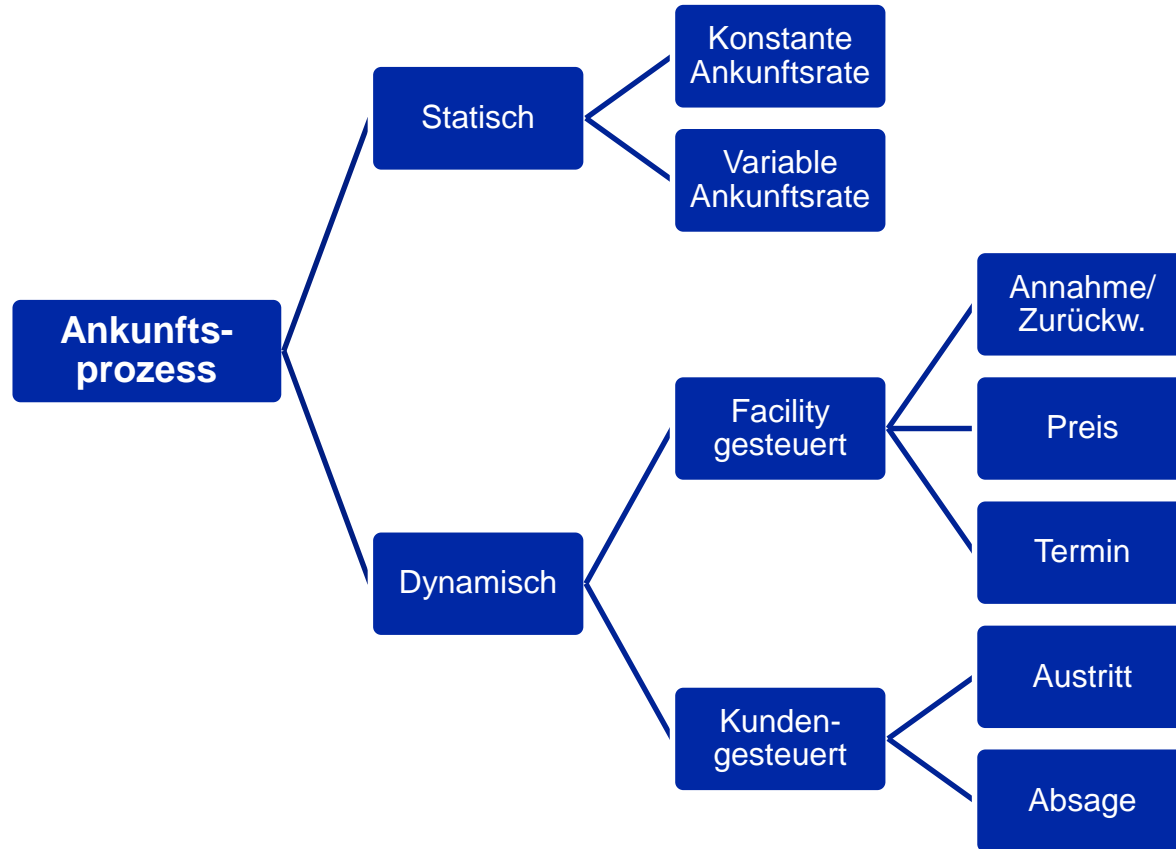


## Grundelemente von Warteschlangensystemen





# Ankunftsprozess





## Exponentialverteilung (stetig)

Dichtefunktion:  $f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad t \geq 0$

$\lambda$  = durchschnittliche Ankunftsrate pro  
Zeiteinheit (z.B. Minuten, Stunden, Tage)

$t$  = Zeitabstand zwischen 2 Ankünften

$e = 2.718...$

Verteilungsfunktion:  $F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad t \geq 0$

Mittelwert:  $1/\lambda$

Varianz:  $1/\lambda^2$



## Poissonverteilung (diskret)

Dichtefunktion: 
$$f(n) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$\lambda$  = durchschnittliche Ankunftsrate pro  
Zeiteinheit (z.B. Minuten, Stunden, Tage)

$t$  = Anzahl der Zeitperioden (i.d.R. 1)

$n$  = Anzahl der Ankünfte (0, 1, 2, ...)

$e = 2.718\dots$

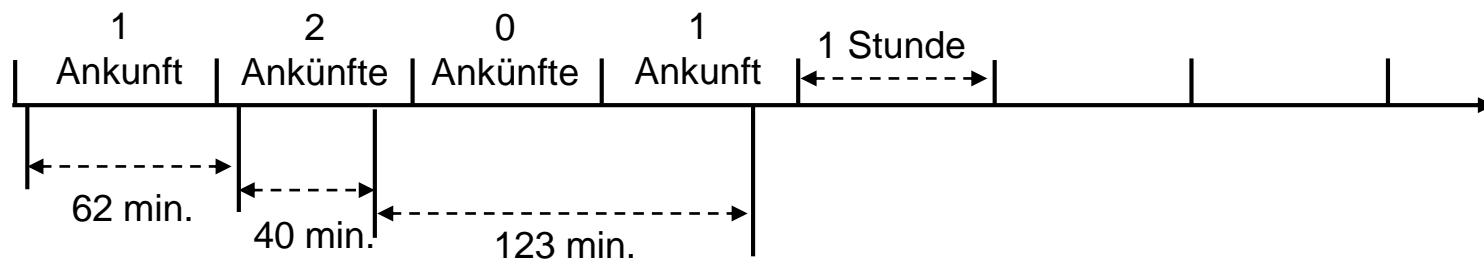
Mittelwert:  $\lambda t$

Varianz:  $\lambda t$



## Äquivalenz zwischen Poisson- und Exponentialverteilung

Poissonverteilung für die Anzahl der Ankünfte pro Stunde (oben)

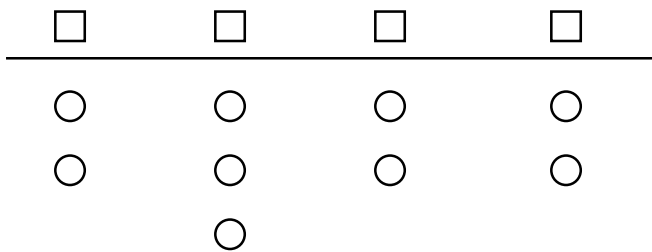


Exponentialverteilung der Zeitabstände zwischen 2 Ankünften in Minuten (unten)

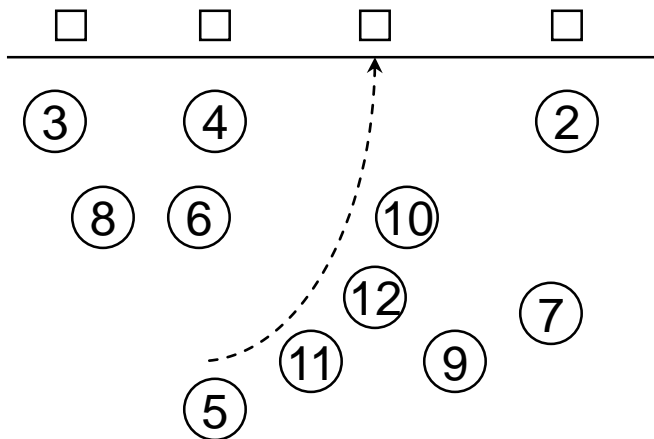


# Warteschlangenkonfiguration

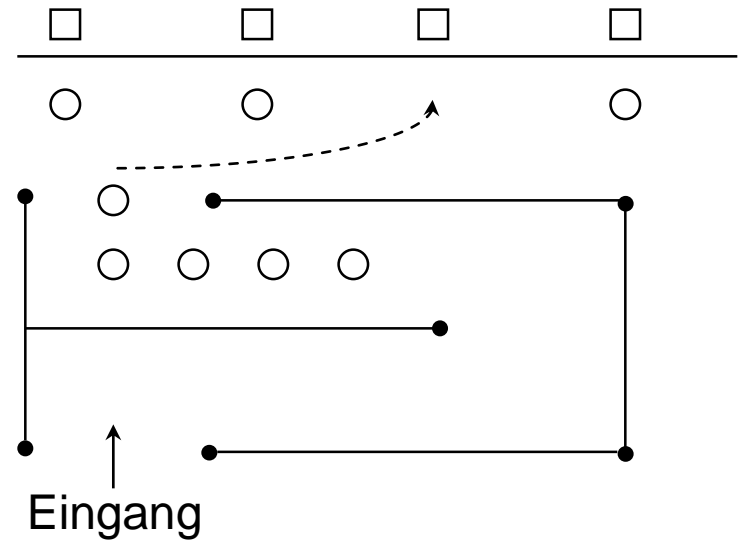
Mehrere Warteschlangen



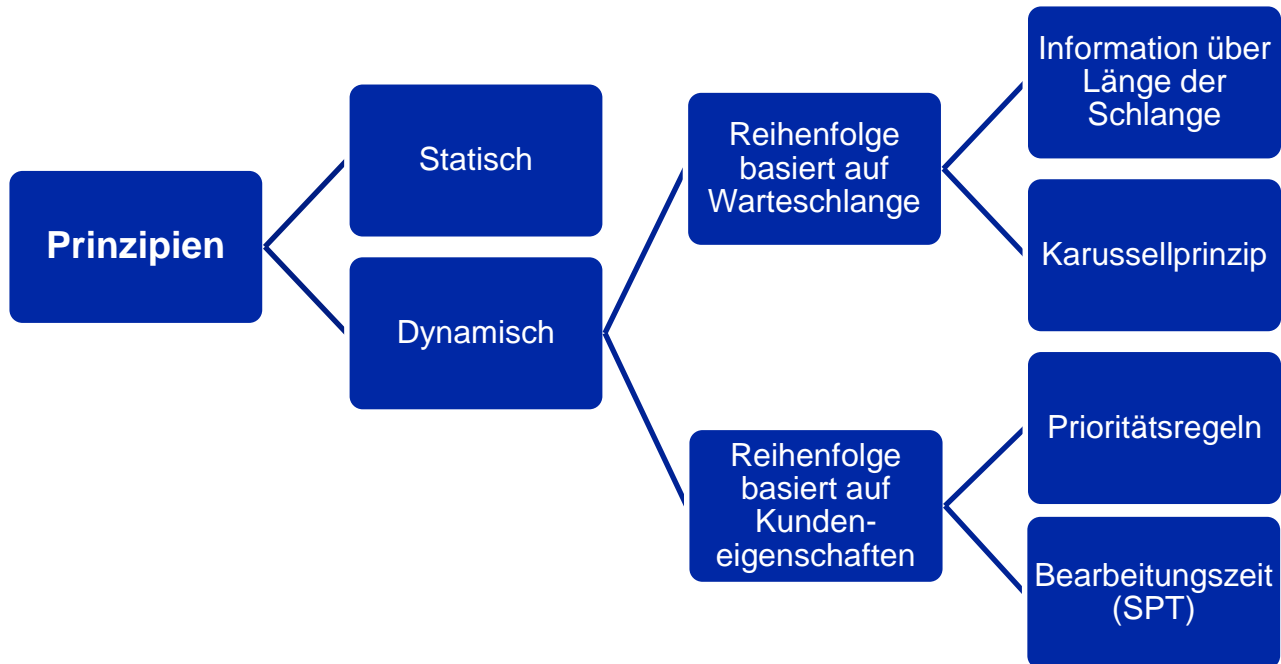
Nummernsystem



Eine Warteschlange



# Reihenfolge

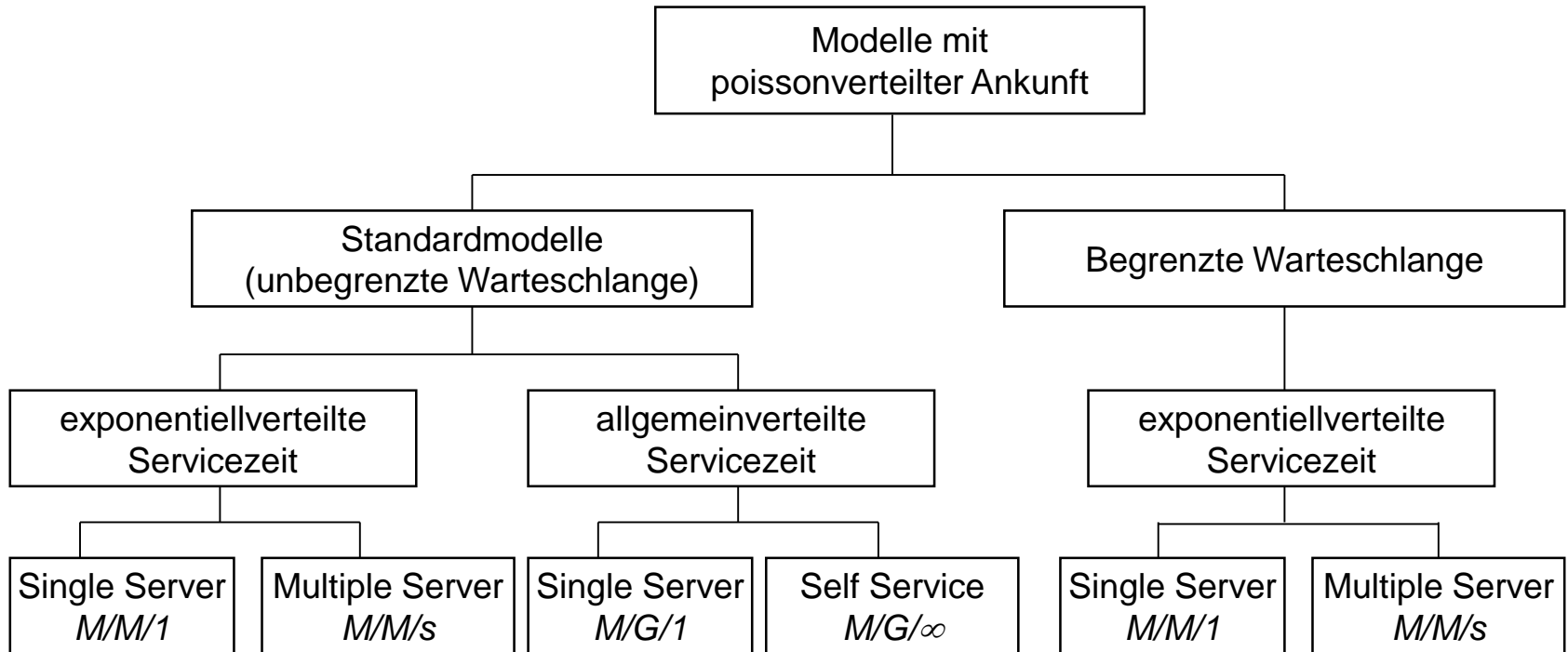




## Serviceanordnung

Servicefacility	Serveranordnung
Parkplatz	Selbstbedienung
Cafeteria	Server hintereinander
Mautstelle	Server parallel
Supermarkt	Selbstbedienung (1. Stufe); Parallel Server (2. Stufe)
Krankenhaus	Viele Servicecenter (parallel und hintereinander)

# Warteschlangenmodelle im Überblick



*A/B/s* Notation: *A* beschreibt die Verteilung der Zeitabstände zwischen 2 Ankünften, *B* beschreibt die Verteilung der Servicezeit und *s* (oder *c*) die Anzahl der Server.

*M* beschreibt die Exponentialverteilung, *G* irgendeine allgemeine Verteilung (z.B. Normalverteilung, Gleichverteilung, etc.)



## Standard M/M/1-Modell

### Voraussetzungen:

- Unbegrenzte oder sehr große Menge potentieller Kunden
- Zeitabstände zwischen 2 Ankünften sind negativ exponentialverteilt bzw. Ankunftsrate ist poissonverteilt
- Eine unbegrenzte Warteschlange ohne Abwanderung von Kunden
- FCFS
- Ein Server mit negativ exponentiell verteilter Servicezeit bzw. poissonverteilter Servicerate
- $\lambda < \mu$



## M/M/1

Poissonverteilte Ankunfts- und Servicerate ( $\lambda < \mu$ )

Durchschnittliche Ankunftsrate:  $\lambda$

Durchschnittliche Servicerate:  $\mu$

Durchschnittlicher Auslastungsgrad:  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

Wahrscheinlichkeit, dass sich genau n Kunden im System befinden:  $P_n = \rho^n (1 - \rho)$

Wahrscheinlichkeit, dass sich k oder mehr Kunden im System befinden:  $P(n \geq k) = \rho^k$



## M/M/1

Durchschnittliche Anzahl von Kunden im System:

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

Durchschnittliche Länge der Warteschlange:

$$L_q = \frac{\rho\lambda}{\mu - \lambda}$$

Durchschnittliche Verweildauer im System:

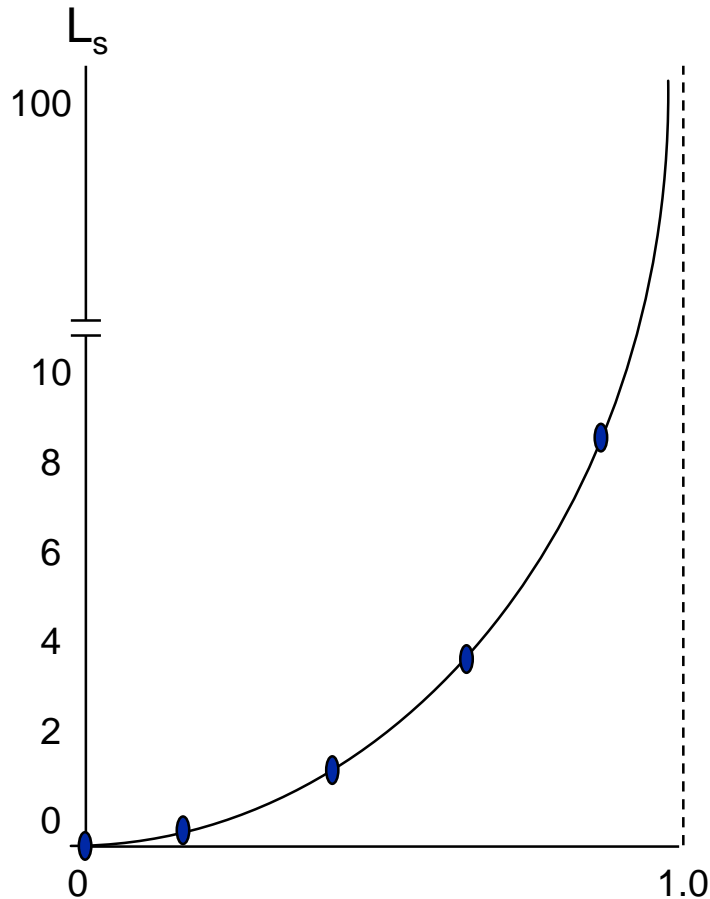
$$W_s = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

Durchschnittliche Verweildauer in der Warteschlange:

$$W_q = \frac{\rho}{\mu - \lambda}$$



## Wie ändert sich die Länge der Warteschlange, wenn $\rho \rightarrow 1$ bzw. $\rho \rightarrow 0$ ?



$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$L_s = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

$\rho$	$L_s$
0	0
0.2	0.25
0.5	1
0.8	4
0.9	9
0.99	99





## Beispiel 1: Eisverkäufer

- Pro Stunde kommen durchschnittlich 80 Kunden.
- Der Verkäufer benötigt je Kunde durchschnittlich 30 Sekunden.
- Ankunftsrate der Kunden ist poissonverteilt.
- Servicerate ist poissonverteilt.



## Fragen zum Eisverkäufer-Beispiel

1. Wie hoch ist der durchschnittliche Auslastungsgrad des Eisverkäufers?
2. Wie lang ist die durchschnittliche Warteschlange vor dem Eisverkäufer?
3. Wie viele Kunden befinden sich durchschnittlich im „System“ (Warteschlange + Bedienung)?
4. Wie lange verweilt ein Kunde durchschnittlich in der Warteschlange (durchschnittliche Wartezeit)?
5. Wie lange verweilt ein Kunde durchschnittlich im „System“ (durchschnittliche Verweilzeit)?



## Eisverkäufer-Beispiel

1. Durchschnittlicher Auslastungsgrad des Eisverkäufers

$$\lambda = 80 \text{ Kunden/Stunde}$$

$$\mu = \frac{1 \text{ Kunde}}{30 \text{ Sekunden} (1 \text{ Stunde} / 3600 \text{ Sekunden})} = 120 \text{ Kunden / Stunde}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{80 \text{ Kunden/Stunde}}{120 \text{ Kunden/Stunde}} = 0,67 = 67\%$$



## Eisverkäufer-Beispiel

2. Durchschnittliche Länge der Warteschlange

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{80^2}{120(120 - 80)} = 1,33$$

3. Durchschnittliche Anzahl der Kunden im System

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{80}{120 - 80} = 2$$



## Eisverkäufer-Beispiel

### 4. Durchschnittliche Wartezeit

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{80}{120(120 - 80)} = \frac{1}{60} \text{ Stunde} = 1 \text{ Minute}$$

### 5. Durchschnittliche Verweilzeit

$$W_s = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{120 - 80} = \frac{1}{40} \text{ Stunde} = 1,5 \text{ Minuten}$$



## M/M/1-Modell mit begrenzter Warteschlange

Eisverkäuferbeispiel:

- Eisverkäufer möchte einen Mclce Drive-in Kiosk betreiben.
- Wie viele Autos müssen in der Drive-in-Schlange mindestens Platz haben, damit mit mehr als 90%iger Wahrscheinlichkeit keine Autos auf der Strasse warten müssen?

- Lösung:  $P(n \geq k) = \rho^k$        $P(n \geq 5) = \rho^5 = 0.13$   
 $P(n \geq 6) = \rho^6 = 0.09$

Mit Platz für sechs Autos im System (fünf in der Schlange und eines in Bedienung) beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Auto auf der Strasse warten muss 9%.

- Antwort: In der Drive-in-Schlange müssen mindestens fünf Autos Platz haben.



## M/G/1-Modell

$$L_q = \frac{\rho^2 + \lambda^2 \sigma^2}{2(1-\rho)}$$

1. Für Exponentialverteilung gilt:

$$\sigma^2 = \frac{1}{\mu^2} \rightarrow L_q = \frac{\rho^2 + \lambda^2 / \mu^2}{2(1-\rho)} = \frac{2\rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{\rho^2}{(1-\rho)}$$

2. Bei konstanter Servicezeit gilt:

$$\sigma^2 = 0 \rightarrow L_q = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}$$

3. Hieraus folgt, dass die durchschnittliche Länge der Warteschlange ( $L_q$ ) jeweils zur Hälfte durch die Varianz der Ankünfte sowie die Varianz der Servicezeit erklärt wird.



## Standard-M/M/s-Modell

Voraussetzungen:

- Wie bei Standard M/M/1-Modell (u.a. eine unbegrenzte Warteschlange und FCFS)
- Servicerate der Server ist unabhängig und identisch verteilt
- $\lambda < s\mu$  bzw.  $\lambda/\mu = \rho < s$

mms.xls M/M/s Queueing Formula Spreadsheet

Inputs:		Definitions of terms:							
lambda	80	lambda	= arrival rate						
mu	120	mu	= service rate						
		s	= number of servers						
		Lq	= average number in the queue						
		Ls	= average number in the system						
		Wq	= average wait in the queue						
		Ws	= average wait in the system						
		P(0)	= probability of zero customers in the system						
		P(delay)	= probability that an arriving customer has to wait						
Outputs:		s	Lq	Ls	Wq	Ws	P(0)	P(delay)	Utilization
	0								
	1		1,3333	2,0000	0,0167	0,0250	0,3333	0,6667	0,6667
	2		0,0833	0,7500	0,0010	0,0094	0,5000	0,1667	0,3333
	3		0,0093	0,6760	0,0001	0,0084	0,5122	0,0325	0,2222
	4		0,0010	0,6677	0,0000	0,0083	0,5133	0,0051	0,1667
	5		0,0001	0,6668	0,0000	0,0083	0,5134	0,0007	0,1333
	6		0,0000	0,6667	0,0000	0,0083	0,5134	0,0001	0,1111
	7		0,0000	0,6667	0,0000	0,0083	0,5134	0,0000	0,0952
	8		0,0000	0,6667	0,0000	0,0083	0,5134	0,0000	0,0833
	9		0,0000	0,6667	0,0000	0,0083	0,5134	0,0000	0,0741
	10		0,0000	0,6667	0,0000	0,0083	0,5134	0,0000	0,0667





## Beispiel: Fahrkartenautomat

Pro Stunde kommen durchschnittlich 20 Kunden

Servicemanager hat die Wahl zwischen

- Einem modernen Hochleistungsautomaten (bedient durchschnittlich 2 Kunden pro Minute)
- Zwei alten Automaten (bedienen jeweils durchschnittlich 1 Kunden pro Minute)



## Fahrkartenbeispiel: 1 Hochleistungsautomat

mms.xls M/M/s Queueing Formula Spreadsheet

**Inputs:**

lambda 20  
mu 120

**Definitions of terms:**

lambda = arrival rate  
mu = service rate  
s = number of servers  
Lq = average number in the queue  
Ls = average number in the system  
Wq = average wait in the queue  
Ws = average wait in the system  
P(0) = probability of zero customers in the system  
P(delay) = probability that an arriving customer has to wait

**Outputs:**

s	Lq	Ls	Wq	Ws	P(0)	P(delay)	Utilization
0							
1	0,0333	0,2000	0,0017	0,0100	0,8333	0,1667	0,1667
2	0,0012	0,1678	0,0001	0,0084	0,8462	0,0128	0,0833



## Fahrkartenbeispiel: 2 Altautomaten

mms.xls M/M/s Queueing Formula Spreadsheet

**Inputs:**

lambda 20  
mu 60

**Definitions of terms:**

lambda = arrival rate  
mu = service rate  
s = number of servers  
Lq = average number in the queue  
Ls = average number in the system  
Wq = average wait in the queue  
Ws = average wait in the system  
P(0) = probability of zero customers in the system  
P(delay) = probability that an arriving customer has to wait

**Outputs:**

s	Lq	Ls	Wq	Ws	P(0)	P(delay)	Utilization
0							
1	0,1667	0,5000	0,0083	0,0250	0,6667	0,3333	0,3333
2	0,0095	0,3429	0,0005	0,0171	0,7143	0,0476	0,1667
3	0,0006	0,3340	0,0000	0,0167	0,7164	0,0050	0,1111



## Trade-offs

### 2 Altautomaten

- $L_q = 0.0095$
- $L_s = 0.3429$
- $W_q = 0.0005$
- $W_s = 0.0171$
- $P(0) = 71\%$
- $P(\text{Delay}) = 4.8\%$
- Auslastungsgrad = 16.7%

### 1 Hochleistungsautomat

- $L_q = 0.0333$
- $L_s = 0.2$
- $W_q = 0.0017$
- $W_s = 0.01$
- $P(0) = 83\%$
- $P(\text{Delay}) = 16.7\%$
- Auslastungsgrad = 16.7%



## Service-Pooling

- Prinzip: Eine statt mehrere Warteschlangen
- Bessere Auslastung der Server
- Beispiele: Postschalter, Sekretärinnenpool
- Nachteil: „Lange“ Warteschlange schreckt evtl. Kunden ab
- Trade-off zwischen Transport- und Wartekosten bei Pooling über mehrere Standorte (1 zentraler Serverpool vs. mehrere dezentrale Server)



## M/M/s-Modell mit begrenzter Warteschlange

- Analog zu M/M/1-Modell mit begrenzter Warteschlange
- $N$  = Maximale Kundenzahl im System  $> s$
- Neu ankommender Kunde wird zurückgewiesen, wenn mehr als  $N-s$  Kunden warten oder mehr als  $N$  Kunden im System sind
- Sonderfall:  $N - s = 0$  (Keine Wartemöglichkeit)
- Beispiel: Parkplatz (jeder Parkplatz ist ein Server)



## M/G/ $\infty$ -Modell

Bei diesem Modell muss kein Kunde warten, da es unendliche viele Server gibt.

Beispiel: Selbstbedienung

Die Anzahl der Kunden im System ist poissonverteilt gemäß

$$P_n = \frac{e^{-\rho}}{n!} \rho^n$$

Es gilt  $L_s = \rho$



## Kostenminimierung

Gesamtkosten/Stunde = Wartekosten/Stunde + Servicekosten/Stunde

$$TC = C_w \lambda W_s + s C_s = C_w L_s + s C_s$$

$C_w$  = Opportunitätskosten/Stunde eines Kunden

$\lambda$  = durchschnittliche Ankunftsrate

$W_s$  = durchschnittliche Verweilzeit im System

$C_s$  = Serverkosten/Stunde

$s$  = Serverzahl

**Achtung:** Gilt nur für Systeme mit  $s > \rho = \lambda/\mu$





## Beispiel: Workstation Miete

- Ein Ingenieurbüro plant Workstations für die Durchführung von Statikanalysen anzumieten
- Durchschnittlich führt ein Ingenieur 8 Statikanalysen pro Stunde durch (poissonverteilt)
- Eine Statikanalyse dauert durchschnittlich 15 Minuten (exponentialverteilt)
- Die Mietkosten betragen je Workstation 10\$/h
- Der Stundenlohn eines Ingenieurs beträgt 30\$/h



## Workstation-Beispiel

Berechnung: M/M/s-Modell mit  $\rho = 8/4 = 2$

$s$	$L_q$	$C_w L_q$	$sC_s$	$TC$
3	0.88	26.4	30	56.4
4	0.17	5.1	40	45.1
5	0.04	1.2	50	51.2
6	0.01	0.3	60	60.3

**Achtung:** Hier wird mit  $L_q$  anstatt  $L_s$  gerechnet, da die Ingenieure an der Workstation bereits produktiv sind!