Universität Zürich[UZH]

Institut für Betriebswirtschaftslehre

Operations Management

Kurzfristige Kapazitätsplanung &

Warteschlangenmanagement

Aufgabe 1 – Lösung/1

$$a)\ \ \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{15}{20} = 0.75$$

$$b)\ \ L_q = \frac{\rho\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{0.75*15}{20-15} = 2.25\ Kunden$$

$$c)\ \ L_s = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{15}{20-15} = 3\ Kunden$$

$$d)\ \ W_q = \frac{\rho}{\mu-\lambda} = \frac{0.75}{20-15} = 0.15\ Stunden = 0.15 * 60 = 9\ Minuten$$

Aufgabe 1 – Lösung/2

e) $W_s = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{20-15} = 0.2\, Stunden = 0.2 * 60 = 12\, Minuten$

f) $P_n = \rho^n(1-\rho)$

$$n = 0 \Rightarrow\ P_o = \rho^0(1-\rho)$$

$$\Rightarrow (1-\rho) = 0.9 \Rightarrow \rho = 0.1$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \Rightarrow \mu = \frac{\lambda}{\rho} = \frac{15}{0.1} = 150\, Kunden\ pro\ Stunde$$

Aufgabe 2 – Lösung/1

a) Die Ankunftsrate beträgt: $\lambda = 30\,\frac{Kunden}{h}$.

Die Servicerate beläuft sich auf: $\mu = \frac{3600\ sek/h}{20\ sek/Kunden} = 180\,\frac{Kunden}{h}$.

Was einen Auslastungsgrad von $\rho = \frac{30\ Kunden/h}{180\ Kunden/h} = 0.167$ ergibt.

b) Daraus lässt sich die durchschnittliche Anzahl an Kunden im System folgendermassen berechnen:

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{30}{180 - 30} = 0.2\ Kunden$$

Aufgabe 2 – Lösung/2

c) Um den Einfluss einer Veränderung der Ankunftsrate auf die Anzahl der Kunden im System zu ermitteln, wird die Ableitung von L_s nach λ gebildet. Beachten Sie dabei die Quotientenregel der Differentialrechnung:

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow\Rightarrow h'(x) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\frac{\partial L_S}{\partial \lambda} = \frac{\partial \left(\frac{\lambda}{\mu - \lambda}\right)}{\partial \lambda} = \frac{1 * (\mu - \lambda) - \lambda * (-1)}{(\mu - \lambda)^2} = \frac{\mu}{(\mu - \lambda)^2} > 0$$

Da dieser Term positiv ist, steigt die Anzahl an Kunden im System, wenn die Ankunftsrate steigt.

Aufgabe 2 – Lösung/3

d) Folgende Punkte sollten in Bezug auf die Einrichtung einer separaten Verkaufskasse berücksichtigt werden:

- Die Servicekosten steigen an, da ein zusätzlicher Mitarbeiter eingestellt werden muss.
- Es ist unklar, wie hoch der Auslastungsgrad ausfallen wird, da wohl nicht genau die Hälfte das teuerste Ticket kauft.
- Das subjektive Gerechtigkeitsempfinden der Mehrheit – welche billigere Tickets kauft – könnte sinken (Zweiklassengesellschaft).
- Die Einrichtung einer separaten Verkaufsstelle stellt eine Möglichkeit zur Differenzierung dar, woraufhin eventuell eine noch teurere Ticketklasse eingeführt werden könnte. Die höheren Preise würden durch eine Sonderbehandlung der entsprechenden Besucher gerechtfertigt.

Aufgabe 3 – Lösung/1

a) Da die Kunden die Warteschlange nicht wechseln können, wird mit zwei M/M/1 Modellen gerechnet. Die Ankunftsrate pro Server beläuft sich somit auf 10 Kunden/h.

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10\ Kunden/h}{20\ Kunden/h} = 0.5$$

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{10\ Kunden/h}{20\ Kunden/h - 10\ Kunden/h} = 1\ Kunde$$

$$TC_{Schalter} = C_W L_S + s\ C_S$$

$$= 15 \frac{CHF}{h * Kunden} * 1\ Kunde + 10 \frac{CHF}{h * Server} * 1\ Server = 25\ \frac{CHF}{h}$$

Somit belaufen sich die Gesamtkosten auf:

$$2 * TC_{Schalter} = 2 * 25 \frac{CHF}{h} = 50 \frac{CHF}{h}$$

Aufgabe 3 – Lösung/2

b) Gesamtkosten ergeben sich aus den Kosten für den Schalter (in Teilaufgabe a) berechnet) sowie den Kosten für den ATM (M/G/1), welche sich wie folgt zusammensetzen:

$$TC_{ATM} = C_W L_S + s\, C_S$$

Die durchschnittliche Anzahl Kunden im System (L_s) ergibt sich aus der Summe der durchschnittlichen Anzahl Kunden in der Warteschlange (L_q) sowie der durchschnittlichen Anzahl Kunden in Service ($\rho = 0.5$). Da der ATM über eine konstante Servicezeit verfügt, liegt die Varianz bei Null ($\sigma^2 = 0$):

$$L_q = \frac{\rho^2 + \lambda^2\sigma^2}{2(1-\rho)} = \frac{0.5^2}{2(1-0.5)} = 0.25\ Kunden$$

$$L_s = L_q + \rho = 0.25 + 0.5 = 0.75\ Kunden$$

$$TC_{ATM} = 15\frac{CHF}{h * Kunden} * 0.75 + 1 * 0\frac{CHF}{h} = 11.25\ \frac{CHF}{h}$$

Aufgabe 3 – Lösung/3

Somit belaufen sich die Gesamtkosten auf:

$$TC = TC_{Schalter} + TC_{ATM} = 25\,\frac{CHF}{h} + 11.25\,\frac{CHF}{h} = 36.25\,\frac{CHF}{h}$$

Ein Vergleich zwischen a) und b) zeigt auf, dass der ATM anstelle eines zweiten Schalters die billigere Variante ist.

Aufgabe 4 – Lösung/1

a) Ausgehend von einem M/M/1-Modell werden zunächst λ und μ bestimmt sowie ρ berechnet. Da sich die Kunden auf die beiden Schalter aufteilen, ergibt sich pro Schalter eine Ankunftsrate von:

$$\lambda = 20 \frac{Kunden}{h}$$

$$\mu = \frac{3600\ sek/h}{72\ sek} = 50 \frac{Kunden}{h}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{20\ Kunden/h}{50\ Kunden/h} = 0.4$$

Daraus kann nun die Anzahl Kunden im System (Schalter) berechnet werden:

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{20}{50-20} = 0.67\ Kunden$$

Woraus sich eine Anzahl von 1.33 Kunden für beide Schalter ergibt.

Aufgabe 4 – Lösung/2

b) Nun wird von einem M/M/c-Modell mit c=2 ausgegangen. Die ankommenden Kunden bilden nur noch eine Warteschlange.

$$\lambda = 40 \ \ Kunden/h$$

$$\mu = \frac{3600 \ sek/h}{72 \ sek} = 50 \frac{Kunden}{h}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{40 \ Kunden/h}{50 \ Kunden/h} = 0.8$$

Die Warteschlange verkürzt sich auf (siehe Tabelle Seite 11 Aufgabenstellung):

$$L_q = \ L_s - \rho$$

$$L_s = L_q + \rho = 0.152 + 0.8 = 0.952 \ Kunden$$

Vergleich: Bei b) sind weniger Kunden im System, da die Kunden in a) die Schlangen nicht wechseln dürfen und es daher sein kann, dass ein Server nicht ausgelastet ist.

Aufgabe 5 – Lösung

Es wird mit einem M/M/1-Modell gerechnet, wobei zunächst der Auslastungsgrad berechnet wird. Die Ankunftsrate λ beträgt *2 Kunden/h*, während sich die Servicerate μ auf *4 Kunden/h* beläuft.

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2\ Kunden/h}{4\ Kunden/h} = 0.5$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass sich 3 (1 beim Schneiden + 2 auf den Stühlen) oder mehr Kunden im System befinden und somit die zusätzlich ankommenden stehend warten müssen, beläuft sich auf:

$$P(n \geq 3) = \rho^3 = 0.5^3 = 0.125 = 12.5\%$$

Aufgabe 6 – Lösung

Bei einem M/G/∞-Modell muss kein Antragsteller warten, da es unendlich viele “Server” gibt. Die Länge der Warteschlange entspricht folglich $L_q = 0$.

Aufgabe 7 – Lösung/1

a)

M/M/1	2010	2011
λ	1.8	3.9
μ	4	4
s	1	1
ρ	45 %	97.50 %
P_0	0.55	
L_q	0.3682	38.0250
L_s	0.8182	
W_q	0.2045	9.7500
W_s	0.4545	
P(n≥1)	0.45	

Auslastungsgrad:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1.8}{4} = 0.45 = 45\%$$

Wahrscheinlichkeit, dass sich kein Kunde im System befindet:

$$P_0 = \rho^0(1-\rho)$$
$$= 0.45^0(1-0.45) = 0.55$$

Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde warten muss:

$$P(n \geq 1) = \rho^1 = 0.45^1 = 0.45$$

Aufgabe 7 – Lösung/2

a)

M/M/1	2010	2011
λ	1.8	3.9
μ	4	4
s	1	1
ρ	45 %	97.50%
P_0	0.55	0.025
L_q	0.3682	38.0250
L_s	0.8182	39
W_q	0.2045	9.7500
W_s	0.4545	10
P(n≥1)	0.45	0.975

Wahrscheinlichkeit, dass sich kein Kunde im System befindet:

$$P_0 = \rho^0(1-\rho)$$
$$= 0.975^0(1-0.975) = 0.025$$

Durchschnittliche Anzahl an Kunden im System:

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{3.9}{4-3.9} = 39\ Kunden$$

Durchschnittliche Wartezeit in Tagen:

$$W_s = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{4-3.9} = 10\ Tage$$

Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde warten muss:

$$P(n \geq 1) = \rho^1 = 0.975^1 = 0.975$$

Aufgabe 7 – Lösung/3

b) Die Servicerate bleibt konstant, also ist die Kritik an der Arbeitsleistung der Mitarbeiterin ungerechtfertigt.