Bachelorstudiengänge Wirtschaftswissenschaften und Informatik

Mathematik I

Prof. Dr. D. Klatte

Universität Zürich

Vorlesungsmaterialien Herbstsemester 2008

Version 21.08.08

Pflichtliteratur

[Ro] H. Rommelfanger
Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Band 1, Spektrum, 2004.

[SH] K. Sydsaeter, P. Hammond
Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Pearson Studium, 2006.

Weitere Literatur

B. Luderer, U. Würker
Einstieg in die Wirtschaftsmathematik, Teubner, 2001.

F. Riedel, Ph. Wichardt
Mathematik für Ökonomen, Springer, 2007.

H. Storrer
Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften I, Birkhäuser, 2002.

K. Marti, D. Gröger
Grundkurs Mathematik für Ingenieure, Natur- und Wirtschaftswissenschaftler, Physica, 2004.

B. Luderer, C. Paape, U. Würker
Arbeits- und Übungsbuch Wirtschaftsmathematik, Teubner, 2000.

H. Rommelfanger,
Übungsbuch Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Spektrum, 2004.

Hinweise zu Vorlesung, Übungen und Selbststudium

Die **Vorlesungsfolien** vermitteln nur den "roten Faden" durch den Stoff, in der **Vorlesung** erläutert der Dozent die Konzepte, Aussagen und Zusammenhänge im Detail und illustriert sie durch Beispiele.

Zum Verständnis sind sehr wichtig **das selbstständige Lösen der Übungsaufgaben**, das Erarbeiten des Stoffs mit Hilfe der **Lehrbücher** *Rommelfanger (Band 1)* und *Sydsaeter/Hammond* sowie die **aktive Beteiligung an den obligatorischen Übungen**.

Das Skript **Brückenkurs Mathematik** ist integraler Bestandteil der Vorlesung und im Selbststudium zu erarbeiten - der Stoff sollte aus der Schule bekannt sein. Die regulären Übungsaufgaben greifen oft auf den Brückenkurs zurück.

Es werden **fakultative Ergänzungsübungen** angeboten, die sowohl den aktuellen Stoff festigen als auch Themen des Brückenkurses aufgreifen.

Stoffverteilung

1. Mengen und Aussagen (1. Woche)
2. Mengen und Folgen reeller Zahlen (2. Woche)
3. Funktionen (3. Woche)
4. Funktionen in einer Variablen (4.-6. Woche)
5. Differentialrechnung der Funktionen in einer Variablen (6.-8. Woche)
6. Differentialrechnung der Funktionen in mehreren Variablen (9.-14. Woche)

Bedingungen für den Erwerb von ECTS-Punkten

1. erfolgreiche Klausur im Januar 2009
2. Erbringung eines Leistungsnachweises für die Übung (für Studierende nach alter PPO "Testat" genannt)

1. Mengen und Aussagen [Ro §1.1 - §1.4], [SH, §3.4 - §3.7]

Eine *Menge* wird definiert durch
Aufzählung ihrer Elemente oder
Angabe von Eigenschaften, welche die Elemente der Menge haben.

Beispiele:

a) $M_1 =$ Menge der Kantone u. Halbkantone der Schweiz (Eigenschaft)

oder $M_1 = \{$BE, VD, AI, ... , SH, ZH$\}$ (Aufzählung der Elemente)

z.B. $AG \in M_1$, aber $FL \notin M_1$

b) $M_2 = \{x | x^2 + x - 6 = 0\}$, d.h. $x \in M_2$ gilt genau dann, wenn x die Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 + x - 6 = 0$ ist. (Eigenschaft)

oder $M_2 = \{-3, 2\}$ (Aufzählung der Elemente)

z.B. $-3 \in M_2$, $1 \notin M_2$.

Allgemein gilt:

Ist M eine Menge, so ist für jedes Objekt m entscheidbar, ob

$$m \in M \qquad \text{oder} \qquad m \notin M$$

" *m ist Element von M* " " *m ist nicht Element von M* "

Definitionssymbol:

Bei der Definition einer Menge, Funktion etc. wird oft das Zeichen **:=** verwendet.

Zahlenmengen - aus der Schule bekannt -

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, ...\}$ Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}$ nicht abgeschlossen bezüglich Subtraktion und Division

$\mathbb{Z} := \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Z}$ abgeschlossen bezüglich Subtraktion, nicht abgeschlossen bezüglich Division

$\mathbb{Q} := \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{Q}$ abgeschlossen bezüglich Subtraktion/Division, aber nicht jedem Element der Zahlengerade entspricht eine rationale Zahl z.B. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\pi \notin \mathbb{Q}$, $e \notin \mathbb{Q}$

$\mathbb{R}$ (auch $\mathbb{R}^1$) Menge der reellen Zahlen
repräsentiert durch die Zahlengerade

Aussagen

Definition: Eine *Aussage* ist ein sinnvoller Satz, der entweder *wahr* oder *falsch* ist.

Z.B.	p	Bern ist die Hauptstadt der Schweiz	w
	q	$\sin\frac{\pi}{2} = 1$	w
	r	Es gibt eine reelle Zahl x mit $x^2 = -1$	f

p, q, r sind offenbar Aussagen, dagegen sind die folgenden Sätze **keine** Aussagen:

- Wie geht es Dir? (Fragesatz)
- Rauchen nicht erwünscht! (Befehl)
- $\frac{x+3}{4} < 1$ enthält eine Variable, so dass kein Wahrheitswert w oder f zuzuordnen ist. (Aussageform)

Durch Einsetzen eines Wertes für x (z.B. $x := 7$) oder *Quantifizierung* (z.B. "es existiert ein $x \in \mathbb{R}$ mit $\frac{x+3}{4} < 1$") kann man die Aussageform zur Aussage machen.

Quantoren erlauben kurze Darstellungen von Aussagen:

$\forall$ "für alle"

$\exists$ "es existiert (mindestens) ein"

Z.B. $\forall x \in \mathbb{R}: \ \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Operationen mit Aussagen: Gegeben seien Aussagen $p, \ q$

$\boxed{p \ \wedge \ q}$ p **und** q (genau dann wahr, wenn p wahr und q wahr)

$\boxed{p \ \vee \ q}$ p **oder** q (genau dann falsch, wenn p falsch und q falsch)

$\boxed{\neg p}$ **nicht** p (genau dann wahr, wenn p falsch)

$\boxed{p \Rightarrow q}$ **aus** p **folgt** q (genau dann falsch, wenn p wahr und q falsch)

$\boxed{p \Leftrightarrow q}$ $:= (p \Rightarrow q) \ \wedge \ (q \Rightarrow p)$ p **genau dann, wenn** q

Tautologien

Eine Aussage, die aus Aussagen $p_1, ..., p_n$ zusammengesetzt ist, heisst *Tautologie*, falls sie bei jeder Belegung von $p_1, ..., p_n$ mit den Wahrheitswerten w oder f wahr ist (also den Wahrheitswert w hat).

Wichtige Tautologien bei mathematischen Beweisen:

$\neg\neg p$	$\Leftrightarrow$	p	**doppelte Verneinung**
$(p \Rightarrow q)$	$\Leftrightarrow$	$(\neg q \Rightarrow \neg p)$	**Kontraposition**
$\neg(p \Rightarrow q)$	$\Leftrightarrow$	$(p \wedge \neg q)$	**Verneinung der Implikation**
$\neg(p \wedge q)$	$\Leftrightarrow$	$(\neg p \vee \neg q)$	**Verneinung der Konjunktion**

<u>ÜA</u> Zeigen Sie mit den bereits bekannten Tautologien die folgende:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q).$$

Teilmengen

Definition:

$A \subseteq B$ bedeutet: $\boxed{\forall x: \; x \in A \;\Rightarrow\; x \in B}$

A ist *Teilmenge* von B (auch: *Untermenge* von B, *enthalten in* B)

$A \subset B$ bedeutet: $\boxed{(A \subseteq B) \wedge (A \neq B)}$

A ist *echte Teilmenge* von B.

$A = B$ bedeutet: $\boxed{(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)}$

Die Mengen A und B sind *gleich*.

Statt $A \subseteq B$ schreibt man auch $B \supseteq A$ (B ist *Obermenge* von A), analog verwendet man $B \supset A$ statt $A \subset B$ (B ist *echte Obermenge* von A).

A heisst *endliche Menge*, falls sie endlich viele (unterscheidbare) Elemente enthält, andernfalls *unendliche Menge*.

Als *Mächtigkeit* einer endlichen Menge A bezeichnen wir die Anzahl ihrer unterscheidbaren Elemente; **Symbol**: $|A|$ oder card A.

Beispiele:

(1) $A := \{1, 4, \frac{8}{2}, \frac{9}{2}, -2, -\frac{4}{3}, -\frac{12}{9}\} \subset \mathbb{Q}$, d.h. card $A = 5$.

(1) $A := \{1, 4, \frac{8}{2}, \frac{9}{2}, -2, -\frac{4}{3}, -\frac{12}{9}\}$ - aufgefasst als Menge von Termen, d.h. card $A = 7$.

(3) $A := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 4\} \cup \{0, 2\}$
das heisst $= \{-2, 0, 2\}$, also card $A = 3$

Hinweis: Auch unendlichen Mengen A kann man eine Mächtigkeit card A zuordnen. Für Mengen A, B gilt card $A =$ card B, falls es eine bijektive Abbildung von A auf B gibt.

Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ heisst *abzählbar unendlich*, ebenso jede Menge A mit card $A =$ card $\mathbb{N}$.

Darstellung von Teilmengen (Beispiel)

(a) <u>definiert durch eine Eigenschaft der Elemente der Teilmenge:</u>

$A := \{x \in \mathbb{Q} \mid (x^2 - \frac{1}{3}) \cdot (x^2 - \frac{1}{4}) = 0\}$,

d.h. $\quad x \in A \;\Leftrightarrow\; [\; x \in \mathbb{Q}$ <u>und</u> x löst $(x^2 - \frac{1}{3})(x^2 - \frac{1}{4}) = 0 \;]$

d.h. A ist die Menge aller <u>rationalen</u> Nullstellen des Polynoms 4. Grades $\quad P(x) := (x^2 - \frac{1}{3})(x^2 - \frac{1}{4}) = x^4 - \frac{7}{12}x^2 + \frac{1}{12}$.

(b) <u>definiert durch Aufzählung aller Elemente der Teilmenge:</u>

In unserem Beispiel gilt für $x \in \mathbb{R}$:

$P(x) = 0$
$\Leftrightarrow \;[\; x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ oder $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ oder $x = \frac{1}{2}$ oder $x = -\frac{1}{2} \;]$,

also bleibt als Menge der rationalen Lösungen $A = \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$.

Im Beispiel wird ein **Prinzip der Definition von Zahlenmengen** deutlich: Man betrachtet eine *Grundmenge* (hier: $\mathbb{Q}$) und definiert eine Teilmenge davon als Lösung von Gleichungen, Ungleichungen oder durch andere Eigenschaften.

Bei *allgemeinen* Mengenuntersuchungen legt man - analog zur Grundmenge bei Zahlenmengen - oft eine *Universalmenge* (oder *Allmenge*) zugrunde, **Symbol**: Ω.

Definition: Die Menge, die *kein* Element enthält, heisst *leere Menge*, **Symbol** $\emptyset$. Zwei Mengen A, B, die kein gemeinsames Element enthalten, heissen *disjunkt* (oder *durchschnittsfremd*).

Es gilt stets: $\emptyset \subseteq A$ für alle Mengen A
$\emptyset \neq \{\emptyset\}$

Definition von Mengenverknüpfungen

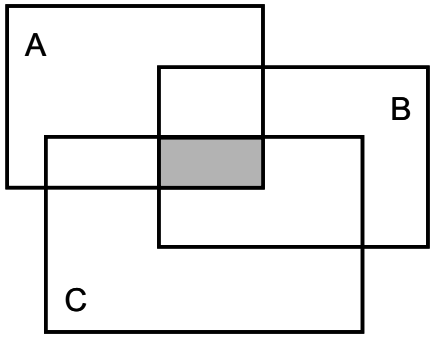
$A \cup B$	$:=$	$\{x \mid x \in A \vee x \in B\}$	*Vereinigung von A und B*
$A \cap B$	$:=$	$\{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$	*Durchschnitt von A und B*
$\overline{A}_B$	$:=$	$\{x \mid x \in B \wedge x \notin A\}$	*Komplement von A bezgl. B*
$A \setminus B$	$:=$	$\{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$	*Differenz von A und B*
$A \triangle B$	$:=$	$(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$	*symmetrische Differenz von A und B*

Die Menge $\overline{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{B}}$ definiert man üblicherweise nur für $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$, für die Universalmenge $\boldsymbol{\Omega}$ schreibt man statt $\overline{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{\Omega}}$ auch kurz $\overline{\boldsymbol{A}}$.

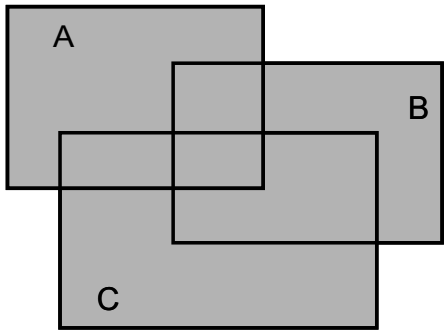
Vereinigung und Durchschnitt von n Mengen

$$\begin{aligned}
\bigcup_{i=1}^{n} A_i &:= A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \\
&= \{x \mid \exists i \in \{1, \ldots, n\} : x \in A_i\} \\
\bigcap_{i=1}^{n} A_i &:= A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \\
&= \{x \mid \forall i \in \{1, \ldots, n\} : x \in A_i\}
\end{aligned}$$

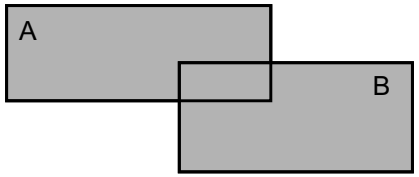
Venn-Diagramme



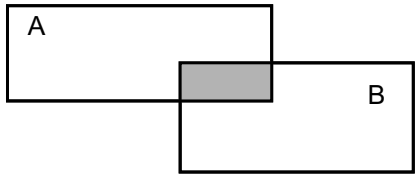
$A \cap B \cap C$



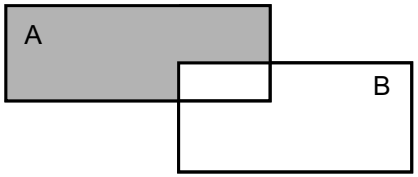
$A \cup B \cup C$



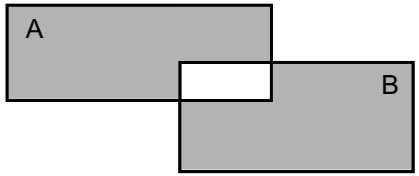
$A \cup B$



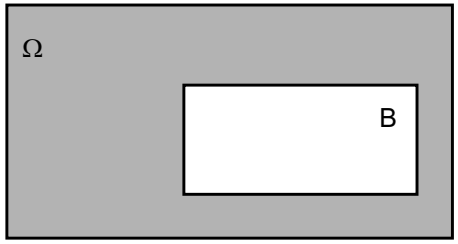
$A \cap B$



$A \setminus B$



$A \Delta B$



$\overline{B}_{\Omega}$

Satz: vgl. [Ro, Sätze 1.5, 1.6]

Mengen A, B, C genügen den folgenden Gesetzen:

$A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$	Kommutativgesetze
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	Assoziativgesetze
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Distributivgesetze
$A \cap \overline{A} = \emptyset$ $A \cup \overline{A} = \Omega$	Komplementarität
$A \cap A = A$ $A \cup A = A$	Idempotenz
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	de Morgan'sche Regeln
$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$	

Potenzmenge einer Menge

$\mathcal{P}A := \{B \mid B \subseteq A\}$ heisst *Potenzmenge von A*.

Beispiel:

$$\begin{aligned} A &= \{x, y, z\} \\ \mathcal{P}A &= \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\},\ A\} \end{aligned}$$

$\mathcal{P}A$ enthält $8 = 2^3$ Elemente in diesem Beispiel. Jedes Element von $\mathcal{P}A$ ist selbst eine Menge.

Hinweis: Beachten Sie, dass auch stets gilt

$$\begin{aligned} \emptyset &\in \mathcal{P}A \\ A &\in \mathcal{P}A. \end{aligned}$$

Beispiel: Bestimmen Sie die Potenzmenge zu

$$M := \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 = 2x\}$$

und geben Sie jedem Element von $\mathcal{P}M$ einen Sinn!

Offenbar gilt für $x \in \mathbb{R}$: $x^3 = 2x \Leftrightarrow (x = 0 \vee x^2 = 2)$, also $M = \{-\sqrt{2},\ 0,\ \sqrt{2}\}$ und folglich

$$\mathcal{P}M = \Big\{ \emptyset, \{-\sqrt{2}\},\ \{0\},\ \{\sqrt{2}\},\ \{-\sqrt{2}, 0\},\ \{0, \sqrt{2}\},\ \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}, \{-\sqrt{2},\ 0,\ -\sqrt{2}\} \Big\}$$

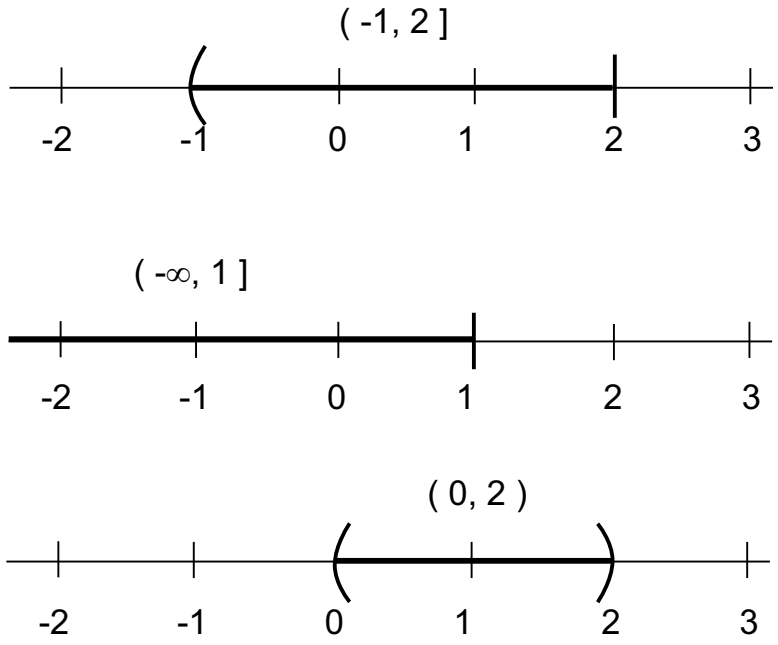
Einen "Sinn", also einen Inhalt kann man z.B. <u>so</u> zuordnen:

$\emptyset$	gehört stets zu $\mathcal{P}M$
M	Menge der (reellen) Lösungen von $x^3 = 2x$
$\{0\}$	Menge nur aus der "trivialen" Lösung der Gleichung
$\{0,\ \sqrt{2}\}$	Menge der nichtnegativen Lösungen von $x^3 = 2x$
$\{-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\}$	Menge der Lösungen von $x^3 = 2x$, die $\neq 0$ sind

etc.

2. Mengen und Folgen reeller Zahlen [Ro §§1.5, 1.8, 5.1]

Beispiele für Intervalle auf der reellen Zahlengerade:



Warnung: Schreibweisen wie $[-\infty, 1]$ oder $(2, +\infty]$ haben für Teilmengen von $\mathbb{R}$ keinen Sinn!

Definition: *Intervalle*

Endliche Intervalle (auch *beschränkte Intervalle* genannt):

Seien a und b Elemente von $\mathbb{R}$ mit $a < b$.

$$
\begin{aligned}
[a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\} && \textit{abgeschlossenes Intervall} \\
[a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x < b\} && \textit{halboffenes Intervall} \\
(a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leq b\} && \textit{halboffenes Intervall} \\
(a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\} && \textit{offenes Intervall}
\end{aligned}
$$

In [SH §1.7 ff] wird unsere Schreibweise verwendet. Wie in [Ro §1.5] können die runden Klammern durch "umgekehrte" eckige Klammern ersetzt werden, also

$$]a,b[= (a,b), \qquad]a,b] = (a,b] \quad \text{usw.}$$

Unendliche Intervalle (auch *unbeschränkte Intervalle* genannt):

Seien a und b Elemente von $\mathbb{R}$.

$$(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < a\}, \qquad (-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq a\},$$
$$(b, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > b\}, \qquad [b, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq b\}.$$

Ferner schreiben wir $(-\infty, +\infty) := \mathbb{R}$.

Wieder können die runden Klammern durch "umgekehrte" eckige Klammern ersetzt werden, also

$$]a, +\infty[= (a, +\infty), \qquad]-\infty, b] = (-\infty, b] \quad \text{usw.}$$

Definition: *Beschränktheit*

Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heisst *nach oben beschränkt*, wenn eine reelle Zahl $\bar{k}$ existiert mit $x \leq \bar{k}$ für alle $x \in M$.

Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heisst *nach unten beschränkt*, wenn eine reelle Zahl $\underline{k}$ existiert mit $x \geq \underline{k}$ für alle $x \in M$.

Dabei heissen $\bar{k}$ eine *obere Schranke von M* und $\underline{k}$ eine *untere Schranke von M*.

$M \subseteq \mathbb{R}$ heisst *beschränkt*, wenn M nach oben und unten beschränkt ist.

Beispiele:

1. Nun ist klar, warum *endliche* Intervalle auch **beschränkt** genannt werden; z.B. ist in $M_1 := (a, b\,],\ a, b \in \mathbb{R}, a < b,$

   a eine untere Schranke, b eine obere Schranke;

   ebenso sind α mit $\alpha < a$ eine untere bzw. β mit $\beta > b$ eine obere Schranke von M_1.

2. Analog heissen *unendliche* Intervalle auch **unbeschränkt**; z.B. $M_2 := [a, +\infty),\ a \in \mathbb{R}$:

   M_2 hat keine obere Schranke, ist also nicht nach oben beschränkt, folglich nicht beschränkt.

3. $M_3 := \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$ enthält unendlich viele Elemente, ist aber beschränkt: $M_3 \subset (0, \frac{1}{2}\,]$.

Definition: *sup, inf, max, min*

Die kleinste obere Schranke einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heisst *Supremum von M* und wird mit $\sup M$ bezeichnet.

Die grösste untere Schranke einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heisst *Infimum von M* und wird mit $\inf M$ bezeichnet.

Falls die Zahl $\sup M$ zu M gehört, so heisst sie *Maximum von M* und wird mit $\max M$ bezeichnet.

Falls die Zahl $\inf M$ zu M gehört, so heisst sie *Minimum von M* und wird mit $\min M$ bezeichnet.

Satz: vgl. [Ro, Satz 1.7]

Falls die Menge $M \subset \mathbb{R}$ nichtleer und nach oben beschränkt ist, so existiert $\sup M$.
Falls die Menge $M \subset \mathbb{R}$ nichtleer und nach unten beschränkt ist, so existiert $\inf M$.

Bezeichnungen:

a) $k^* = \sup M$ liest man "k^* ist das Supremum von M";

b) Existieren für das $M \neq \emptyset$ das Supremum bzw. das Infimum *nicht*, so schreiben wir symbolisch $\sup M = +\infty$ bzw. $\inf M = -\infty$.

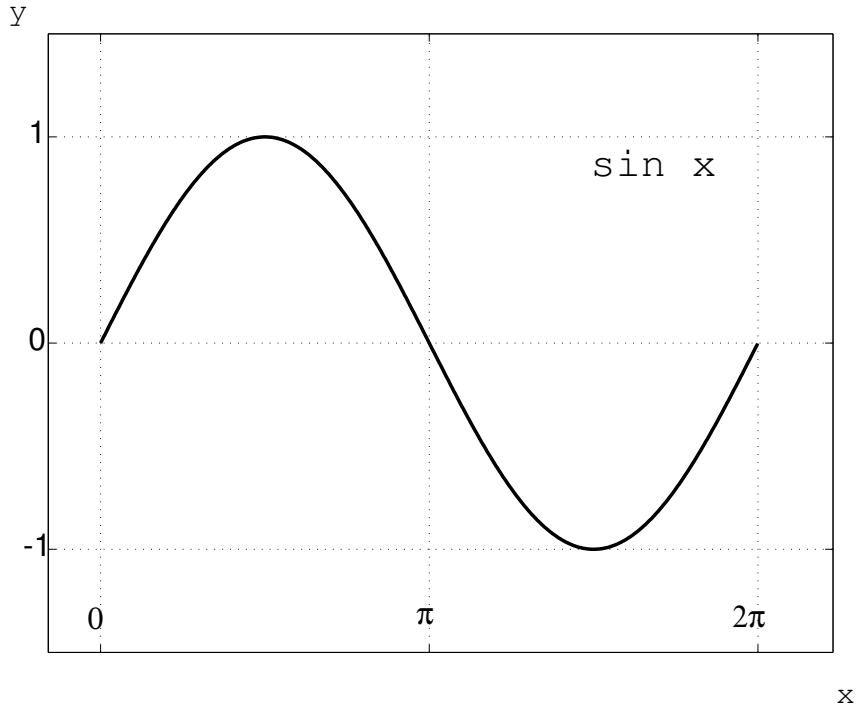
Beispiele:

(i) $M_4 := [-1, 25)$

- $\min M_4 = -1$, d.h. $\inf M_4 = -1$ <u>und</u> $-1 \in M_4$
- $\sup M_4 = 25$. Da $25 \notin M_4$, existiert kein Maximum von M_4.
- M_4 ist beschränkt.

(ii) $M_5 := \{\sin x \mid 0 < x < 2\pi\}$

Da für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $-1 \leq \sin x \leq 1$, sind alle $k \leq -1$ untere Schranken und alle $k \geq 1$ obere Schranken für M_5.
$\Rightarrow M_5$ beschränkt.



d.h.:
$M_5 = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in (0, 2\pi) : y = \sin x\} = [-1, 1]$, also

- $\max M_5 = \ \ 1 = \sin \frac{\pi}{2}$
- $\min M_5 = -1 = \sin \frac{3\pi}{2}$

(iii) $M_6 = \{\sqrt{x} \mid 0 \leq x < +\infty\}$

- min $M_6 = 0$
- sup $M_6 = +\infty$

(iv) *Supremum einer Zahlenfolge*

Bestimmen Sie das Supremum der Menge

$$A = \{(-\frac{1}{2})^{2n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

<u>Lösung</u>: $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $2n+1$ ungerade
$\Rightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $(-\frac{1}{2})^{2n+1} < 0$, d.h. 0 ist obere Schranke von A, und es bleibt zu zeigen, dass es die *kleinste* obere Schranke ist. Nun ist aber A eine Nullfolge, d.h., für hinreichend grosses n übersteigt $(-\frac{1}{2})^{2n+1}$ jede vorgegebene negative reelle Zahl. Damit ist 0 die kleinste obere Schranke, also sup $A = 0$.

Definition: *Folge*

Sei M eine gegebene Menge. Die Abbildung (vgl. §3)

$$\begin{array}{llll} 1, & 2, & \ldots, & k, \ldots & \in \mathbb{N} \\ \downarrow & \downarrow & \ldots, & \downarrow & \downarrow \\ a_1, & a_2, & \ldots, & a_k, \ldots & \in M \end{array}$$

heisst (unendliche) *Folge*, kurz geschrieben als $\{a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots\}$.

Im Falle $M = \mathbb{R}$ sprechen wir von einer (reellen) *Zahlenfolge*.
Schreibweisen sind auch: $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ oder einfach $\{a_k\}$.
Jedes a_k darin heisst *Folgenglied*.

Allgemeiner: Sei $I \subseteq \mathbb{N}$ eine sogenannte *Indexmenge*. Die durch

$$\begin{array}{c} k \in I \\ \downarrow \\ a_k \in M \end{array}$$

definierte Abbildung heisst *Folge zur Indexmenge I*, Symbol: $\{a_k\}_{k \in I}$.

Beispiel: Folge der Spareinlagen mit Zinseszins. Bei einmaliger Einzahlung von 10'000 Fr. und fester jährlicher Verzinsung von 3% ergibt sich

Start	a_1	$= 10'000$
nach 1 Jahr	a_2	$= 10'000 + 300$
		$= 1.03 \cdot a_1$
nach 2 Jahren	a_3	$= (1.03)^2 \cdot a_1$
		$= 10'609$
$\vdots$		
nach k Jahren	a_{k+1}	$= 1.03 \cdot a_k$
		$= (1.03)^k \cdot 10'000$

Offenbar gilt:

$$a_{k+1}/a_k = 1.03 \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Eine Zahlenfolge mit der hier angetroffenen Eigenschaft $a_{k+1}/a_k = q$ mit konstantem $q \neq 0$ heisst *geometrische Folge*, ihr Bildungsgesetz lautet

$$a_{k+1} = a_1 \cdot q^k.$$

Grenzwerte von Folgen

Einführungsbeispiel: Betrachte $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{2^n}$.

Vermutung: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Sei $\epsilon > 0$ beliebig vorgegeben.

$$\begin{aligned} |(\tfrac{1}{2})^n| &< \epsilon \\ \Leftrightarrow \tfrac{1}{2^n} &< \epsilon \\ \Leftrightarrow 2^n &> \tfrac{1}{\epsilon} \\ \Leftrightarrow n &> {}^2\log \tfrac{1}{\epsilon} \end{aligned}$$

Falls also $n(\epsilon) \in \mathbb{N}: \; n(\epsilon) >^2 \log \frac{1}{\epsilon}$, dann gilt:

$$n \geq n(\epsilon) \Rightarrow |(\frac{1}{2})^n| < \epsilon$$

Man betrachte z.B. $\epsilon = 0.1$: Für $n \geq 4$ gilt $a_n \leq \frac{1}{16} < 0.1$
(in der Tat gilt: ${}^2\log 10 < 3.33$)

Definition: *Konvergenz von Folgen*

Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine unendliche Folge reeller Zahlen.

Man sagt, eine Eigenschaft $\mathcal{H}$ ist für *fast alle* Glieder der Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt, falls es eine natürliche Zahl n_0 gibt, so dass $\mathcal{H}$ für alle Folgenglieder a_n mit $n \geq n_0$ erfüllt ist.

Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert* gegen den *Grenzwert* a, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ die ε–Umgebung $U_\varepsilon(a)$ von a fast alle Glieder von $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ enthält, d.h., in jeder beliebigen (noch so kleinen) ε–Umgebung von a sind mit Ausnahme von endlich vielen Gliedern alle Glieder der Folge enthalten. Man schreibt $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Hat die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ den Grenzwert 0, so heisst sie *Nullfolge*.

Satz: Wichtige Rechengesetze für Grenzwerte von Folgen

Es seien $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b,$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b,$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}, \text{ falls } b_n \neq 0 (\forall n), b \neq 0.$$

Definition: Hat die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ einen Grenzwert, so heisst sie *konvergent*, andernfalls *divergent*. Unter den divergenten Folgen zeichnen wir aber einige aus: Falls für $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gilt

$$\forall c > 0 \ \exists n(c) \in \mathbb{N}: \ a_n > c \quad \text{für alle } n \geq n(c),$$

dann schreiben wir $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, man sagt:

$\{a_n\}$ hat den *uneigentlichen Grenzwert* $+\infty$.

Sinngemäss definiert man $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, falls

$$\forall c < 0 \ \exists n(c) \in \mathbb{N}: \ a_n < c \quad \forall n \geq n(c).$$

Beispiel: Sei $c > 0$ beliebig gross. Dann gilt $\ln n > c \Leftrightarrow n > e^c$.

Wählt man $n(c) \in \mathbb{N}$ mit $n(c) > e^c$, dann folgt $n \geq n(c) \Rightarrow a_n = \ln n > c$.
Also $\lim\limits_{n\to\infty} \ln n = +\infty$.

Definition: Eine Folge $\{a_k\}$ heisst *beschränkt*, falls die Menge $M = \{a_k \,|\, k \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist. Eine Folge mit der Eigenschaft

$$a_k \leq a_{k+1} \ \forall k \qquad \text{(bzw. } a_k < a_{k+1} \ \forall k\text{)}$$

heisst *monoton wachsend* (bzw. *streng monoton wachsend*). Eine Folge mit der Eigenschaft

$$a_k \geq a_{k+1} \ \forall k \qquad \text{(bzw. } a_k > a_{k+1} \ \forall k\text{)}$$

heisst *monoton fallend* (bzw. *streng monoton fallend*). Eine Folge heisst *monoton* (bzw. *streng monoton*), wenn sie eine der beiden (strengen) Monotonieeigenschaften besitzt.

Satz: Wichtige Eigenschaften von Folgen: [Ro Sätze 5.1, 5.2]

1. Jede konvergente Folge ist beschränkt.

   Bemerkung: Umkehrung gilt nicht! $\{+1, -1, +1, -1, ...\}$ ist beschränkt, aber nicht konvergent.
2. Jede monotone, beschränkte Folge ist konvergent.

Anwendung: [Ro §5.1], [SH §6.11]

$\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ ist streng monoton wachsend (leicht nachzurechnen) und beschränkt (≥ 0 klar, < 3 zeigt man über binomische Formel und Summenformel der geometrischen Reihe) $\Rightarrow$ Konvergenz.

Definition: *Zahl e*

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Es handelt sich um eine irrationale Zahl: $2.7182 < e < 2.7183$.

Weitere wichtige Grenzwerte:

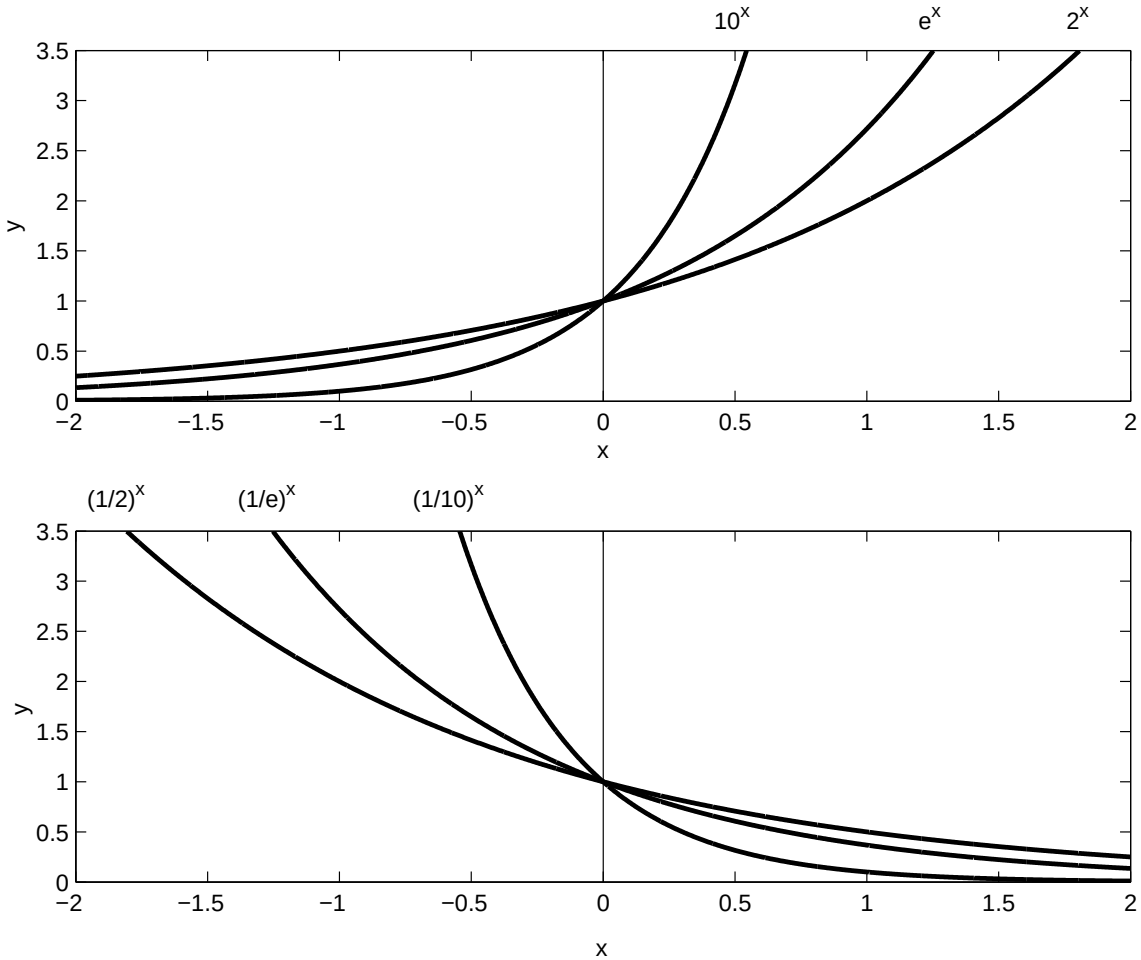
$$\text{Sei } \alpha > 0: \quad \frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{1}$$

$$\text{Sei } |q| < 1: \quad q^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{2}$$

$$\text{Sei } q > 1: \quad q^n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \tag{3}$$

Notationshinweis: $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ (kurz $a_n \to a$) entspricht $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.
Beim Zeichen "lim" für Folgen bitte stets mit Zusatz $n \to \infty$!

Zur Illustration der Konvergenzen (2) und (3) im letzten Beispiel:



Definition: *Reihe* Brückenkurs, [Ro §1.8], [SH §10.4]

Gegeben sei eine Zahlenfolge $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Dann heisst

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

n-te Partialsumme der Folge. Die Folge $\{s_n\}_{n\in\ \mathbb{N}}$ der Partialsummen heisst *(unendliche) Reihe*, die Elemente a_k heissen *Glieder der Reihe*.

Harmonische Reihe: Reihe mit $a_k := \frac{1}{k}$ $(k \in \mathbb{N})$
Geometrische Reihe: Reihe mit $a_k := q^k,\ q \notin \{0,1\}, (k \in \mathbb{N})$

Summenformel der geometrischen Reihe $(k = 1, ..., n)$

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{q - q^{n+1}}{1-q} \quad (q \neq 1)$$

Summenformel der geometrischen Reihe $(k = 0, ..., n)$

$$\tilde{s}_n := \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q} \quad (q \notin \{0,1\})$$

Ein kleiner "Ausflug" über Reihen (nicht in der Pflichtliteratur):

Wir sagen, dass eine unendliche Reihe gegen einen Wert s *konvergiert*, falls die Folge der Partialsummen gegen s konvergiert. Man schreibt in diesem Falle $s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Geometrische Reihe: Sei q eine reelle Zahl mit $0 < |q| < 1$. Dann gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q},$$

was mit Hilfe der Summenformel für die Partialsummen $\sum_{k=0}^{n} q^k$ folgt.

Notwendige Bedingung: Wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, dann ist die Folge $\{a_k\}_{k\to\infty}$ eine Nullfolge. Die Umkehrung gilt nicht, wie das Beispiel der *harmonischen Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ zeigt.

Nichtnegative Glieder: Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit $a_k \geq 0 \ \forall k$ konvergiert genau dann, wenn die Folge der Partialsummen beschränkt ist.

Alternative Definition der Zahl e: Man kann zeigen

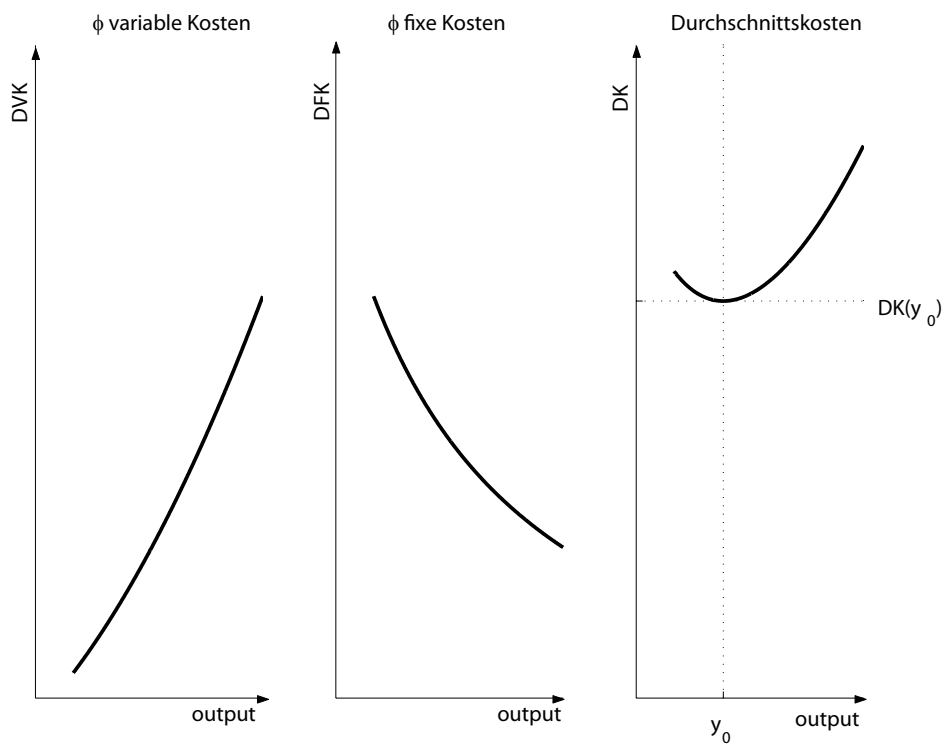
$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}. \quad \text{(setze } x = 1\text{)}$$

3. Funktionen

[Ro §4], [SH §§4-5]

Der Funktionsbegriff: nicht nur innerhalb der Mathematik wichtig, sondern auch grundlegend zur Beschreibung von ökonomischen Zusammenhängen.

Einführendes Beispiel



$DVK + DFK = DK$
(vgl. Varian *Mikroökonomie*)

z.B.: die Gleichung der Durchschnittskosten $DK = DK(y)$ definiert Zuordnungsvorschrift, und zwar die *Funktion*
$y \longmapsto DK(y) \quad (y \geq 0)$.
Existiert auch eine Umkehrfunktion $DK \longmapsto y(DK)$?

3.1. Kartesisches Produkt von Mengen [Ro §4.1], [SH, §4.3]

Für die systematische Definition einer Funktion (oder allgemeiner: einer Relation) benötigen wir die folgende

Definition: *Produktmenge (kartesisches Produkt)*

Soll für zwei Elemente $a \in A$ und $b \in B$ die Reihenfolge berücksichtigt werden, so schreiben wir sie als *geordnetes Paar* (a, b). Zwei geordnete Paare (a, b) und (c, d) heissen *gleich*, wenn $a = c$ und $b = d$.

Seien A und B zwei beliebige Mengen. Dann heisst die Menge

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \ \wedge \ b \in B\}$$

Produktmenge (bzw. *kartesisches Produkt*) von A und B.

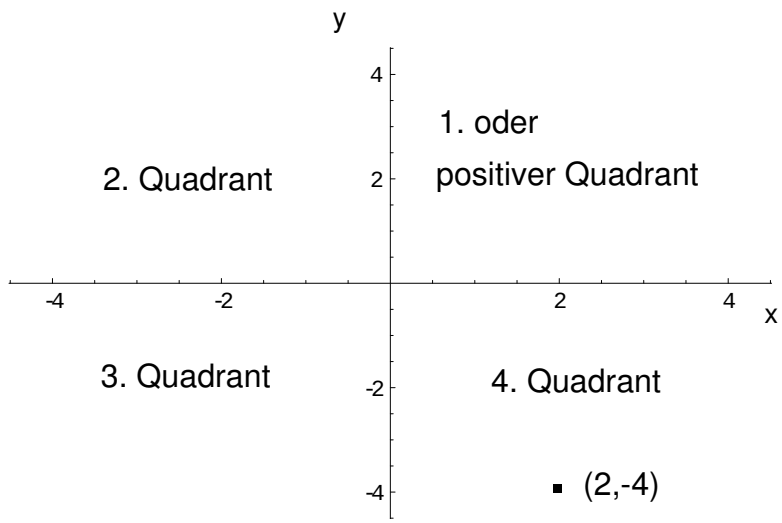
Beispiel: $A = \{\text{Anna, Max}\}$, $B = \{\text{Mathe, Statistik, BWL}\}$. Dann gilt z.B.:

$$(\text{Anna,BWL}) \in A \times B, \qquad (\text{Anna,Max}) \in A \times A,$$

$$(\text{BWL,Anna}) \in B \times A, \text{ aber } \notin A \times B.$$

Für $A \times A$ schreiben wir auch A^2.

Speziell ist die Menge $\mathbb{R}^2$ die Menge aller geordneten Paare (a, b) mit $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$, d.h., die Menge aller geordneten Paare von reellen Zahlen. Den $\mathbb{R}^2$ kann man veranschaulichen (z.B.) durch Punkte (oder Ortsvektoren) in einem *kartesischen Koordinatensystem*, vgl. Skript zum Brückenkurs.



Das kartesische Produkt von zwei Halbachsen heisst *Quadrant*.
([Ro §4.1] fordert: "die Punkte auf den Achsen gehören nicht dazu" - wird in der Literatur nicht einheitlich so gehandhabt)

Spezielle Quadranten

positiver Quadrant	$(0, +\infty) \times (0, +\infty)$
nichtnegativer Quadrant	$[0, +\infty) \times [0, +\infty)$

Punkte (d.h. *Ortsvektoren*) im kartesischen Koordinatensystem schreiben wir als geordnete Paare (in der Zeichnung oben z.B. $(2, -4)$, allgemein (x, y)).

Definition *n-Tupel* Seien $A_1, \ldots, A_n$ gegebene Mengen. Werden n Objekte $a_1, a_2, ..., a_n$ mit $a_i \in A_i$ $(\forall i)$ unter Berücksichtigung der Reihenfolge zusammengefasst, so schreibt man

$$(a_1, a_2, ..., a_n)$$

und nennt diesen Ausdruck *(geordnetes) n-Tupel*.

Hier wurde das n-Tupel als *Zeilentupel* (auch *Zeilenvektor* oder *Zeilenmatrix* genannt) geschrieben.

Nur eine andere Schreibweise: gleiche Bedeutung hat das Schreiben eines n-Tupels als *Spaltentupel* (*-vektor, -matrix*)

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Zwei n-Tupel $(a_1, a_2, ..., a_n)$ und $(b_1, b_2, ..., b_n)$ heissen *gleich*, wenn

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n.$$

Definition *Kartesisches Produkt von n Mengen* ($A_1, \ldots, A_n$ gegebene Mengen)

$$\bigtimes_{i=1}^{n} A_i := \left\{ (a_1, a_2, ..., a_n) \;\middle|\; \begin{array}{ccc} a_1 & \in & A_1 \\ a_2 & \in & A_2 \\ & \vdots & \\ a_n & \in & A_n \end{array} \right\}$$

Beispiel:

Güterbündel aus n Gütern $a = (a_1, ..., a_i, ..., a_n)$

$\uparrow$

Menge des i-ten Gutes

Wenn z.B. a_i in <u>Stück</u> angegeben ist, wäre

$$a_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, i = 1, ..., n,$$

also

$$a \in \underbrace{(\mathbb{N} \cup \{0\}) \times \ ... \ \times (\mathbb{N} \cup \{0\})}\ \ n\text{-mal},$$

d.h.

$$a \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n.$$

Bezeichnungen:

Für die Menge aller n-Tupel reeller Zahlen schreiben wir $\mathbb{R}^n$.

3-Tupel heissen *Tripel*, 4-Tupel heissen *Quadrupel*.

Im $\mathbb{R}^n$ heissen die kartesischen Produkte von n Halbachsen *Orthanten*, z.B. ist $[0, +\infty)^n$ der *nichtnegative Orthant* des $\mathbb{R}^n$ und $(0, +\infty)^n$ der *positive Orthant* des $\mathbb{R}^n$.

In einem n-Tupel $(x_1, ..., x_i, ..., x_n)$ heissen die Elemente *Komponenten* (oder *Koordinaten*) des n-Tupels, z.B. x_1 1. Komponente und x_i i-te Komponente.

Die Menge $A^n = A \times A \times \ldots \times A$ (n-mal) nennt man die *n-te (kartesische) Potenz* der Menge A.

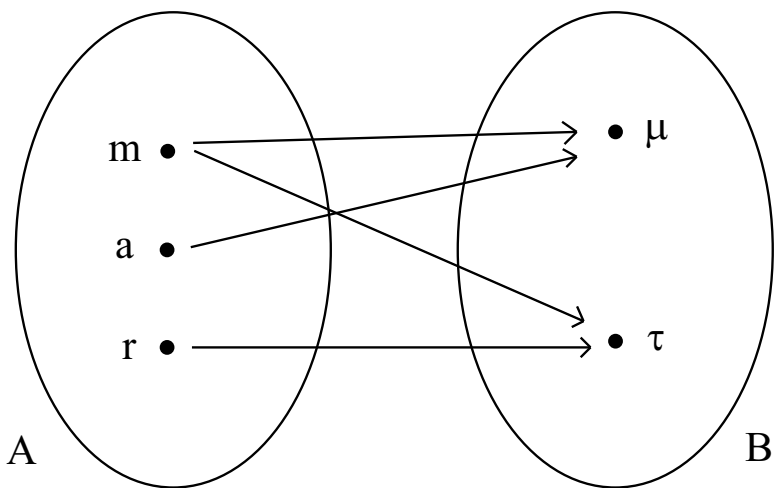
3.2. Relationen [Ro 4.1]

Definition: Seien A und B zwei Mengen. Jede Teilmenge $\mathcal{R}$ des kartesischen Produktes $A \times B$ heisst *Relation zwischen A und B*.
Für $(a, \mu) \in \mathcal{R}$ sagt man auch *a steht in Relation zu μ*, und man schreibt $a \; \mathcal{R} \; \mu$.

Beispiele:

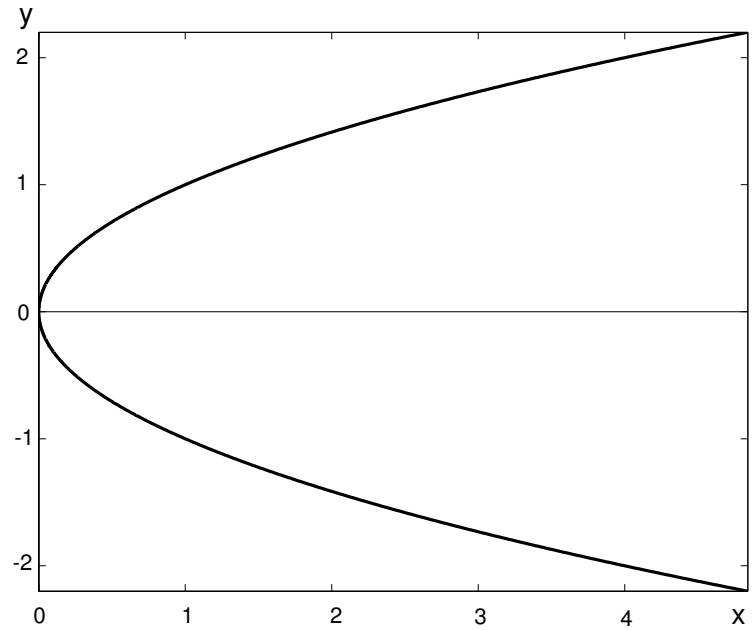
(1) $A = \{$ Maria, Anna, Rosa$\}$, $B = \{$Mathe, Statistik$\}$.

m a r μ τ



$$\mathcal{R} = \{(\mathrm{m}, \mu), (\mathrm{m}, \tau), (\mathrm{a}, \mu), (\mathrm{r}, \tau)\}$$

(2) $A = [0, +\infty)$, $B = \mathbb{R}$, $\mathcal{R} := \{(x, y) \in A \times B \mid x = y^2\}$.



z.B.:

$$\begin{array}{lcl} \underline{x} & & \underline{y} \\ 0 & \longmapsto & 0 \\ 1 & \longmapsto & \left.\begin{array}{r} -1 \\ 1 \end{array}\right\} \\ 8 & \longmapsto & \left.\begin{array}{r} -\sqrt{8} \\ \sqrt{8} \end{array}\right\} \end{array}$$

Bemerkung

(1) und (2) definieren *mehrdeutige Relationen* (auch *Korrespondenz* oder *mengenwertige Abbildung* genannt), d.h., die betreffende Relation $\mathcal{R}$ enthält Paare $(x, y_1), (x, y_2)$ mit $y_1 \neq y_2$, d.h., es gibt mindestens ein $x \in A$, dem mehrere Elemente aus B zugeordnet werden.

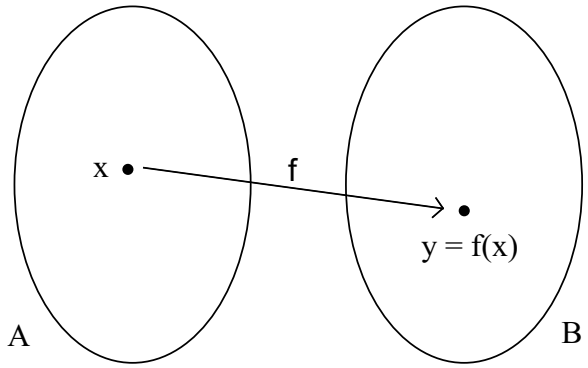
Diejenigen Relationen, die nicht mehrdeutig sind, werden logischerweise *eindeutige Relationen* genannt, man bezeichnet sie auch als *Abbildungen* oder *Funktionen*.

Obwohl mehrdeutige Relationen interessante ökonomische Anwendungen haben und von mathematisch-theoretischer Bedeutung sind, gehen wir aus Zeitgründen nicht näher auf sie ein. Z.B. kann man die Lösungsmenge einer Kreisgleichung wie

$$\mathcal{R} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 16\}$$

als mehrdeutige Relation interpretieren, vgl. [SH §5.4].

3.3. Funktionen (Abbildungen) vgl. speziell [Ro §4.3] [SH §5.6]



Definition Eine *Funktion (= Abbildung) f von A in B* ist eine Zuordnung, die jedem Element $x \in A$ **genau ein** Element $y \in B$ zuordnet, mit anderen Worten: sie ist eine eindeutige Relation.

Dabei heisst A *Definitionsbereich* (auch *Urbildmenge*) von f, wir benutzen auch oft das Symbol D_f. B heisst *Zielmenge* von f.

$f(A) := \{f(x) \in B \mid x \in A\}$ heisst *Wertebereich* (auch *Bild- oder Wertemenge*) von f, wir benutzen auch oft das Symbol W_f.

$G_f(A) := \{(x,\ f(x)) \mid x \in A\}$ heisst *Graph* von f, wir benutzen auch die Symbole $\operatorname{gph} f$ bzw. $\operatorname{graph} f$.

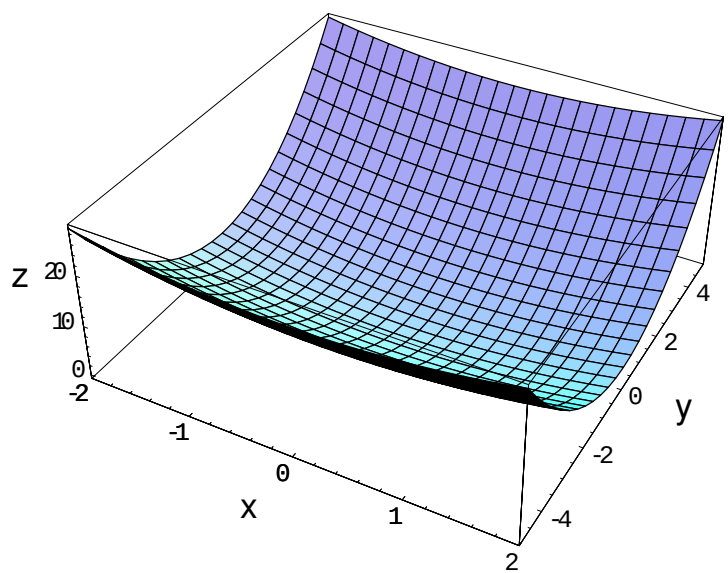
Schreiben wir eine Funktion f von A in B *direkt* als eine Teilmenge von $A \times B$ (also als eine Relation "f"), so ergibt sich

$$"f" \ = \{(x, y) \in A \times B \,|\, y = f(x)\},$$

das ist aber gerade der *Graph* $\operatorname{gph} f$ der Funktion f!

Machen Sie sich das z.B. klar an $f(x, y) = x^2 + y^2$, d.h., $A = \mathbb{R}^2$, $B = \mathbb{R}$,

$\operatorname{gph} f = \{((x, y), z) \in A \times B | z = x^2 + y^2\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = x^2 + y^2\}$:



Bezeichnungen:

$f : A \to B$ *"f ist eine Funktion von A in B"*

$x \overset{f}{\mapsto} y$ bzw. $x \mapsto y = f(x)$ bzw. $y = f(x)$ steht gleichberechtigt

für *"y ist das Bild von x bezüglich f"*

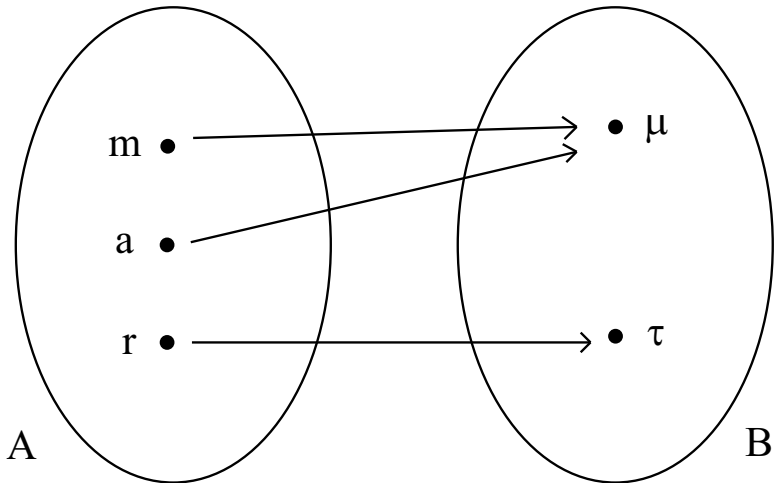
als auch *"x ist ein Urbild von y bezüglich f"*.

Ist $f : A \to B$ und $X \subset A$, so heisst die Menge

$$f(X) \;:=\; \{f(x) \in B \,|\, x \in X\}$$ *Bild von X bezüglich f.*

Beispiele:

(1) *Modifikation des Studentinnen - Vorlesung - Beispiels*



$F = \{(\mathrm{m}, \mu),\ (\mathrm{a}, \mu),\ (\mathrm{r}, \tau)\}$ definiert eine **Funktion** (d.h., eine eindeutige Relation) von $A = \{\mathrm{m,a,r}\}$ in $B = \{\mu, \tau\}$:

Jedes $x \in A$ hat <u>genau ein</u> Bild $y = F(x) \in B$.

Bemerkung: Dagegen <u>kann</u> es zu Elementen des Wertebereichs einer Funktion mehrere Urbilder geben! In unserem Beispiel ist die Menge der Urbilder von μ bezüglich F gleich $\{\mathrm{m}, \mathrm{a}\}$, denn

$$\mathrm{m} \mapsto \mu \quad \text{und} \quad \mathrm{a} \mapsto \mu.$$

(2) *Folgen reeller Zahlen*

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longmapsto & a_1 \\ 2 & \longmapsto & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ n & \longmapsto & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{N} & & \mathbb{R} \\ \text{Definitionsbereich} & & \text{Zielmenge} \end{array}$$

definiert die Funktion $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, die jeder natürlichen Zahl n das Element $a(n) = a_n \in \mathbb{R}$ zuordnet. Diese Funktion kennen wir bereits unter dem Namen *reelle Zahlenfolge*, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist nur eine kompakte Schreibweise für diese Funktion. <u>Speziell:</u>

(i) $a_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, ist die Zuordnungsvorschrift der *harmonischen Folge*, ihr Wertebereich ist die Menge $\{1/n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) $b_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, definiert die beschränkte, aber divergente Folge $\{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$ mit dem Wertebereich $\{1, -1\}$.

(iii) $c_n = \frac{3-2n}{|3-2n|}$, $n \in \mathbb{N}$, definiert die Folge $\{1, -1, -1, -1, \ldots\}$, sie ist konvergent und hat auch den Wertebereich $\{1, -1\}$.

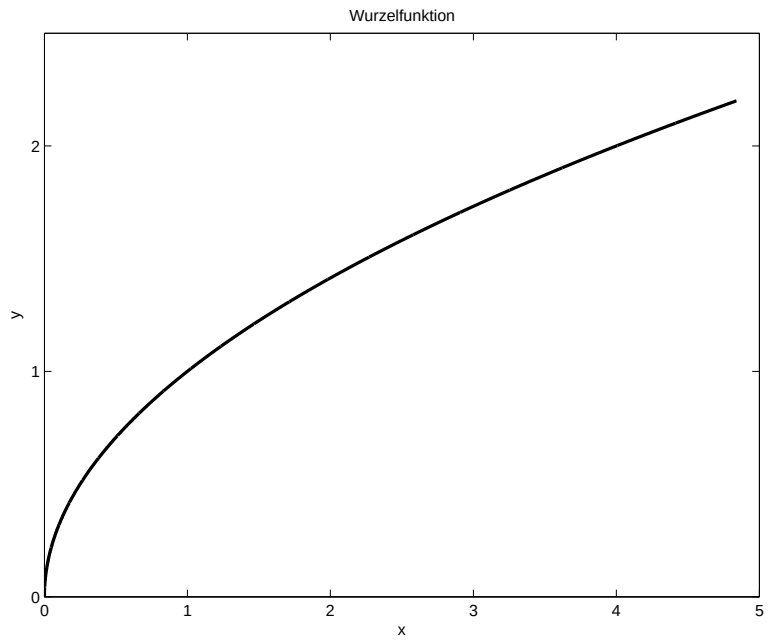
(3) *Modifikation der Relation "Parabel"*

$$\mathcal{R} := \{(x, y) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R} \mid x = y^2\}$$

ist bekanntlich eine **mehrdeutige Relation**, aber z.B.

$$\mathcal{R}^+ := \{(x, y) \in [0, +\infty) \times [0, +\infty) \mid x = y^2\}$$

definiert eine **Funktion**, nämlich $y = \sqrt{x}$:



(4) *Lineare Funktionen von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$*

Sei $l : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$l(x, y) := ax + by + c, \;\; (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

wobei a, b, c gegebene reelle Konstanten seien.

Die linearen Funktionen werden auch *linear-affin* genannt.

$$\mathcal{R} = \{((x, y), z) \in \; \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid z = ax + by + c\}$$

definiert eine eindeutige Relation, also eine Funktion, denn zu jedem Paar (x, y) (Urbild!) wird durch die Definitionsgleichung **genau ein** $z = ax + by + c$ (Bild!) zugeordnet.

Definitionsbereich: $A = \mathbb{R}^2$

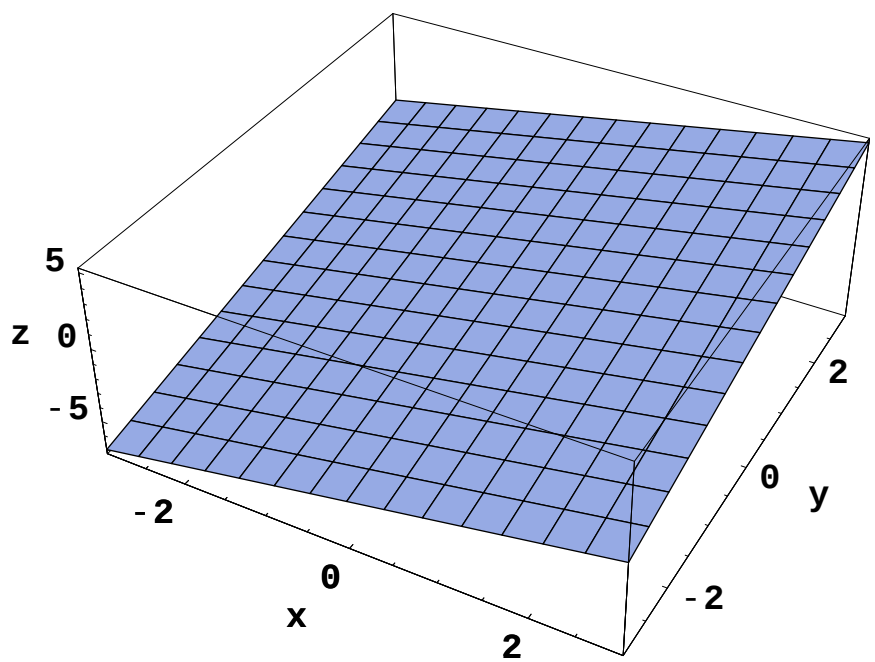
Wertebereich: $l(A) = \begin{cases} \{c\} & \text{falls } a = b = 0 \\ \mathbb{R} & \text{sonst} \end{cases}$

Da $((x,y),z)$ nichts anderes als das geordnete Tripel (x,y,z) ist, gilt

$$\mathcal{R} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = ax + by + c\} = \operatorname{gph} l\,.$$

Erkenntnis: Die Vorgabe des **Graphen** einer Funktion ist *eine* Möglichkeit, sie zu definieren.

$\operatorname{gph} l$:



$z = ax + by + c$ (hier im Bild: $a = 1$, $b = 1$, $c = -1$.)

Sprechweise:

Der *natürliche Definitionsbereich* D_f einer

$$\text{reellen Funktion } x \mapsto y = f(x)$$

gibt an, für welche $x \in \mathbb{R}$ die betreffenden Definitionsterme $f(x)$ erklärt sind, der *natürliche Wertebereich* ist dann $W_f = f(D_f)$.

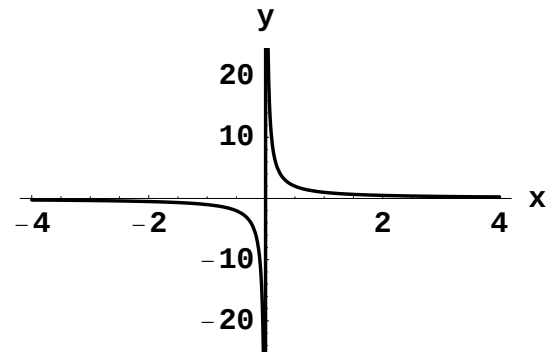
Beispiele: (vgl. Illustration auf der folgenden Seite)

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$: $\quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad W_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

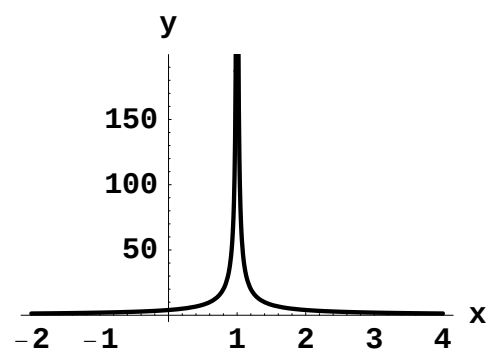
(b) $g(x) = \dfrac{4}{|1-x|}$: $\quad D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad W_g = (0, +\infty)$

(c) $h(x) = \sqrt{x-1}$: $\quad D_h = [1, +\infty), \quad W_h = [0, +\infty)$

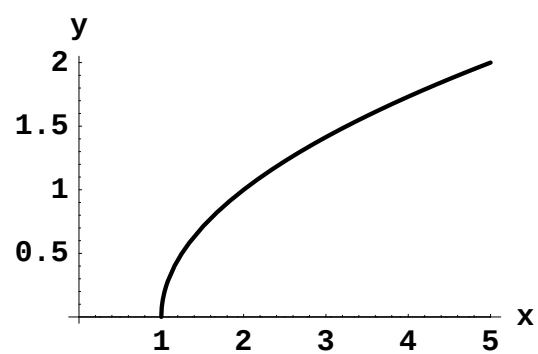
$$f(x) = \frac{1}{x}$$



$$g(x) = \frac{4}{|1-x|}$$



$$h(x) = \sqrt{x-1}$$



3.4 Eigenschaften von Funktionen

[Ro §4.3.3], [SH 5.2-5.3]

$f : A \longrightarrow B$ heisst Funktion *von A auf B* bzw. *surjektiv*, falls

$$B = f(A).$$

$f : A \longrightarrow B$ heisst *eineindeutige* bzw. *injektive* Funktion*, falls gilt:

$$\left[\begin{array}{l} x \neq \widehat{x} \\ x,\ \widehat{x} \in A \end{array} \quad \Rightarrow \quad f(x) \neq f(\widehat{x}) \right]$$

$f : A \longrightarrow B$ heisst *bijektiv*, falls A surjektiv **und** injektiv ist.

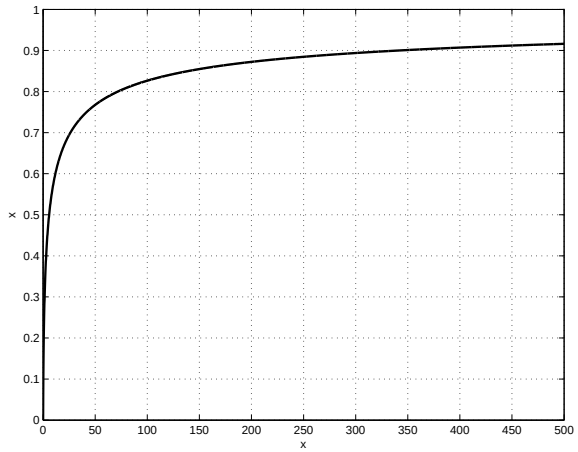
*auch: *Eins zu Eins* oder *umkehrbar eindeutig*

Beispiele:

(1) Sei

$$f(x) = (1 + x^{-0.5})^{-2}, \quad x > 0,$$

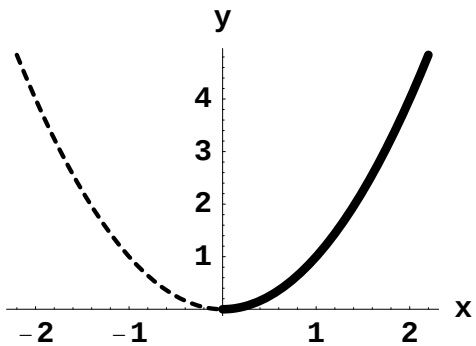
in Anwendungen ist das eine spezielle CES-Produktionsfunktion:



$f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist injektiv, aber nicht surjektiv, denn es gilt $W_f = (0, 1)$. Fassen wir f aber als Funktion von $(0, +\infty)$ in die Zielmenge $(0, 1)$ auf, dann ist f bijektiv.

Erkenntnis: Die Begriffe "injektiv" und "surjektiv" hängen von der Wahl der Zielmenge bzw. des Definitionsbereichs ab !

(2) Sei $g(x) = x^2$.



2a. $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist *weder* surjektiv (z.B. $-1 \notin W_g$) *noch* injektiv (denn z.B. $f(1) = f(-1)$)

2b. $g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ ist bijektiv, denn zu jedem Bild y der Funktion g gibt es genau ein Urbild x ("injektiv") und jedes Element $y \in [0, +\infty)$ kommt als Bild der Funktion g vor ("surjektiv").

Vorgriff: In den Beispielen 1 und 2b sind die betrachteten Funktionen streng monoton wachsend über ihrem Definitionsbereich. Daraus folgt nach einem mathematischen Satz die Injektivität.

Die o.a. Begriffe sind sinnvoll auch bei komplizierteren Funktionen.

3) Mit Faktormengen x_1, x_2 zu zwei Produktionsfaktoren werden Outputs y_1, y_2, y_3 nach folgender Funktion erzeugt

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1(x_1, x_2) := 4x_1 + 2x_2 && \text{(i)} \\ y_2 &= y_2(x_1, x_2) := x_1 + x_2 && \text{(ii)} \\ y_3 &= y_3(x_1, x_2) := x_1 + 3x_2 && \text{(iii)} \end{aligned}$$

Gesucht sind *alle* möglichen Outputvektoren (y_1, y_2, y_3), die nach dieser Funktion produziert werden können.

Offenbar gelingt es z.B. nicht, den Ouptput $y = (1, 0, 0)$ zu erzeugen: *andernfalls* ist $x_1 = x_2 = 0$ wegen (ii) und (iii) – und damit (i) nicht erfüllbar.

Ergo: Die Funktion $Y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$(x_1, x_2) \mapsto Y(x_1, x_2) := (y_1(x_1, x_2), y_2(x_1, x_2), y_3(x_1, x_2))$$

ist *nicht* surjektiv. **Andererseits** ist Y *injektiv*, denn zu jedem $y \in \mathbb{R}^3$ gibt es *höchstens ein* $x \in \mathbb{R}^2$, das das lineare Gleichungssystem (i), (ii), (iii) löst. (Hinweis: Das System (ii),(iii) hat eine eindeutige Lösung (x_1, x_2).)

Zusammensetzung von Funktionen

Beispiel: $h(x) = \ln|x-1|$ ist entstanden durch Verkettung von

$$\begin{array}{lll} x & \longmapsto & y = f(x) := |x-1| \\ & & y \longmapsto z = g(y) = \ln y. \end{array}$$

Allgemein:

$$\begin{array}{lll} x & \longmapsto & y = f(x) \\ & & y \longmapsto z = g(y). \end{array}$$

Das funktioniert nur, wenn

$$W_f \subseteq D_g.$$

Definition: Genügen $f : A \longrightarrow B$ und $g : C \longrightarrow D$ der Bedingung

$$\text{Wertebereich von } f \subseteq C,$$

so lassen sich f und g *verketten* zur *Zusammensetzung* $g \circ f$ *von* f *und* g*:*

$$\begin{array}{lll} g \circ f : & A & \longmapsto & D \\ & x & \longmapsto & z = g(f(x)). \end{array}$$

Beispiel: Bestimme den natürlichen Definitionsbereich $D_{g\circ f}$ und den natürlichen Wertebereich $W_{g\circ f}$ für

$$f(x) = |x-1| \quad \text{und} \quad g(y) = \ln y.$$

Da $\ln y$ nur definiert ist für $y > 0$, folgt $D_{g\circ f} = \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Offenbar gilt $W_{g\circ f} = \mathbb{R}$, denn

$$\text{zu jedem } z \in \mathbb{R} \text{ existiert ein } x \neq 1 \text{ mit } z = \ln|x-1|,$$

wähle z.B. $x = e^z + 1$ (> 1!).

<u>Zusammenhang zur Theorie:</u> Der natürliche Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$ von $f(x) = |x-1|$ muss eingeschränkt werden auf

$$A = \mathbb{R} \setminus \{1\},$$

folglich gilt $f(A) = (0, +\infty) = D_g$. Damit lassen sich (vgl. Definition!) f und g verketten.

Definition: *Umkehrfunktion einer bijektiven Funktion*

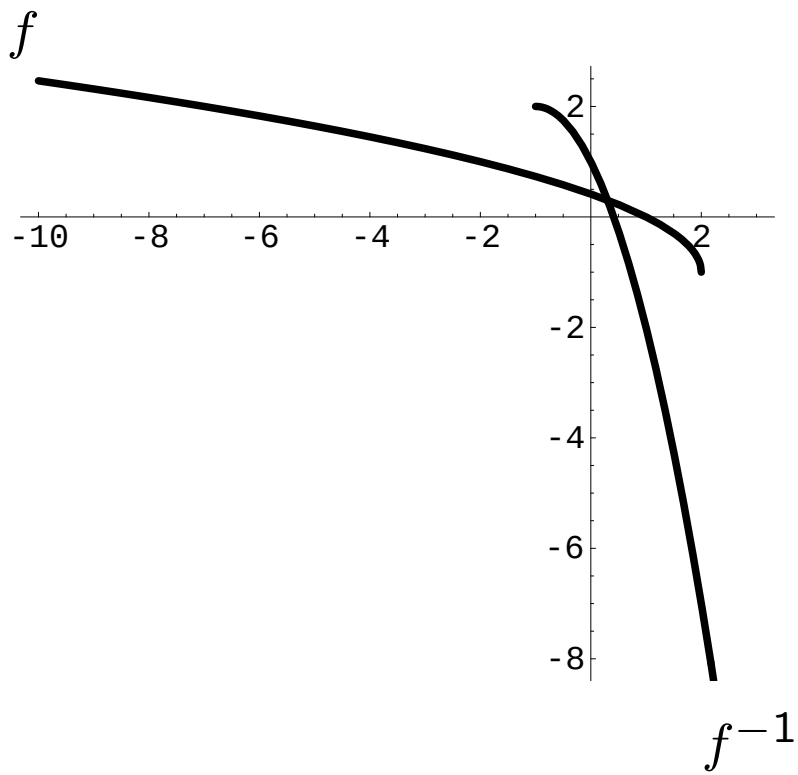
Ist $f : A \to B$ bijektiv, so heisst

$$f^{-1} : \begin{array}{l} B \to A \\ y \mapsto x := f^{-1}(y) \end{array}$$

mit

$$\begin{array}{ll} f^{-1} \circ f(x) = x & \forall x \in A \\ f \circ f^{-1}(y) = y & \forall y \in B \end{array}$$

Umkehrfunktion zu f (auch *Inverse zu f*).



Die Existenz von f^{-1} folgt aus der *Surjektivität von f*,

d.h., jedes $y \in B$ hat mindestens ein Urbild $x \in A$,

und der *Injektivität* von f,

d.h., $x \neq \widehat{x} \Rightarrow f(x) \neq f(\widehat{x})$.

Vereinbarung: Jede *injektive* Funktion

$$\begin{aligned} f: \quad & A \to B \\ & x \mapsto y := f(x) \end{aligned}$$

hat in folgendem Sinne eine *Umkehrfunktion* f^{-1}:

Man schränke die Zielmenge B ein auf den Wertebereich $W = f(A)$.
Dann ist

$$f : A \to W \qquad \text{automatisch surjektiv},$$

und es ist wohldefiniert die Inverse

$$\begin{aligned} f^{-1}: \quad & W \to A \\ & y \mapsto x := f^{-1}(y) \end{aligned}$$

1. Beispiel: Nachfragefunktion [Ro, Bsp. $< 4.11 >$]

Seien p der Preis eines Gutes, x die Nachfrage nach dem Gut.

Typische Annahmen: "sinkende Nachfrage bei steigendem Preis" sowie "Nachfrage bleibt beschränkt bei Preis =0".

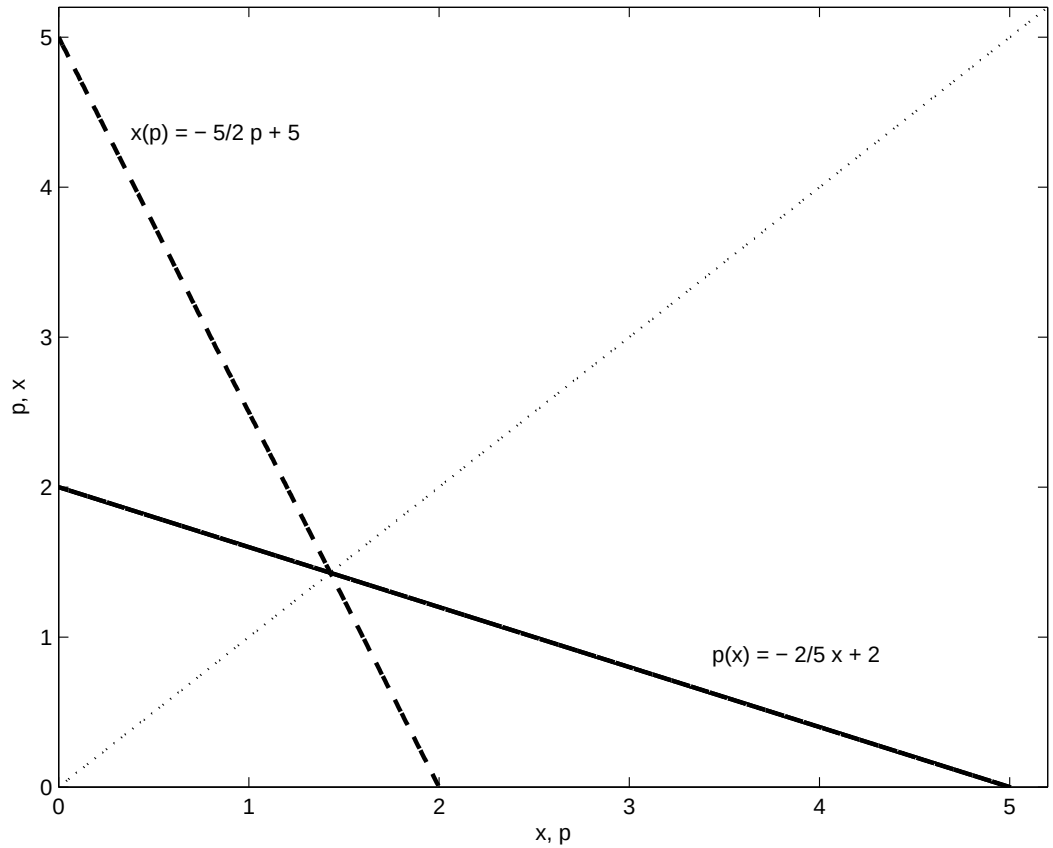
Traditionelle Konvention [A. Marshall 1842 - 1924]:
p aufgetragen auf **Ordinate**, x aufgetragen auf **Abzisse.**

Gegeben:
$p = p(x) = -\frac{2}{5}x + 2, \;\; x \in [0, 5]$

Umkehrfunktion zu $x \mapsto p(x)$:
$x = x(p) = -\frac{5}{2}p + 5, \;\; p \in [0, 2]$

Umkehrung nach Konvention:
Abbildungsrichtung umkehren.

Umkehrung mathematisch:
Spiegelung an $\{(x, p) | p = x\}$.



2. Beispiel: Präferenzen eines Konsumenten

(Implizit definierte Funktion)

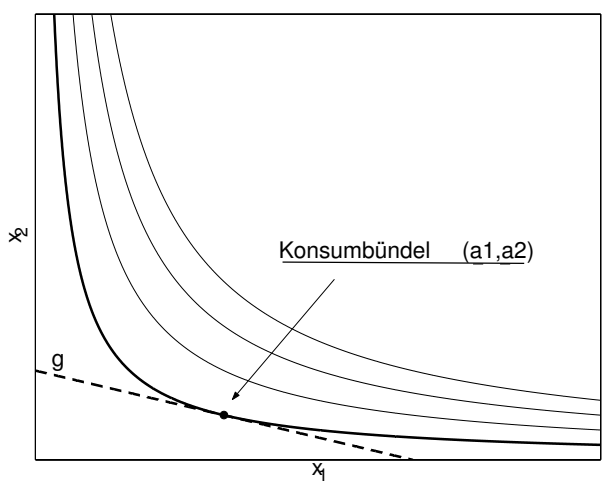
In der Nutzentheorie betrachtet man u.a. die Indifferenzkurven

$$u(x_1, x_2) = \nu$$

einer Nutzenfunktion

$$\underbrace{(x_1, x_2)}_{\text{Konsumbündel}} \quad \longmapsto \quad u(x_1, x_2),$$

die z.B. so aussehen können:



In diesem Fall definiert die Gleichung

$$u(x_1, x_2) = u(a_1, a_2)$$

"implizit" eine Funktion

$$x_2 = x_2(x_1) \text{ mit } a_2 = x_2(a_1).$$

Dann ist $x_2'(a_1)$ = Anstieg von g ("Grenzrate der Substitution"); vgl. Kapitel 6 der Vorlesung Mathe I.

4. Funktionen in einer Variablen

Definition: Eine Funktion von $D \subseteq \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ heisst *reellwertige Funktion in einer reellen Veränderlichen*, kurz: *reelle Funktion*.

In §4.1 befassen wir uns mit den folgenden Eigenschaften:
• Monotonie, • Beschränktheit, • Existenz von Extrema,
• Konvexität, • Symmetrie, • Periodizität.

§**4.2** ist einigen *elementaren Funktionen* gewidmet.

§**4.3** befasst sich mit *Grenzwerten und Stetigkeit von Funktionen*.

Im §**4.4** führen wir *Ableitungen von Funktionen* ein, während

§**4.5** *wichtige Eigenschaften stetiger Funktionen* zusammenstellt.

Die *Differentialrechnung* für reelle Funktionen und ihre mathematischen und praktischen Anwendungen folgen in Kapitel 5.

4.1. Spezielle Eigenschaften reeller Funktionen [Ro §4.4]

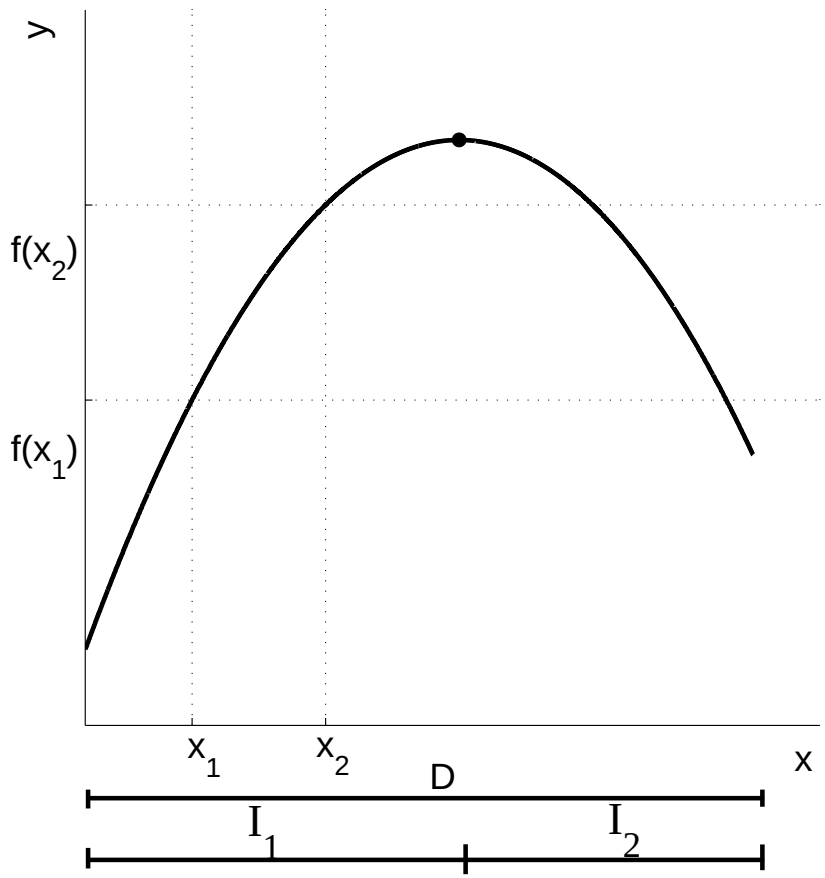
Definition: *Monotonie*

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, ferner sei $I \subseteq D$ ein Intervall. Gilt für beliebige $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ stets

$f(x_1) \leq f(x_2)$, so heisst f *monoton steigend in I*;
$f(x_1) < f(x_2)$, so heisst f *streng monoton steigend in I*;
$f(x_1) \geq f(x_2)$, so heisst f *monoton fallend in I*;
$f(x_1) > f(x_2)$, so heisst f *streng monoton fallend in I*

Synonyme für "monoton steigend": "monoton wachsend" oder "monoton nicht fallend".

Illustration:



f ist nicht monoton auf D

Dagegen gilt:

$x_1, x_2 \in I_1,\ x_1 < x_2$
$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, d.h.,

f ist streng monoton steigend in I_1.

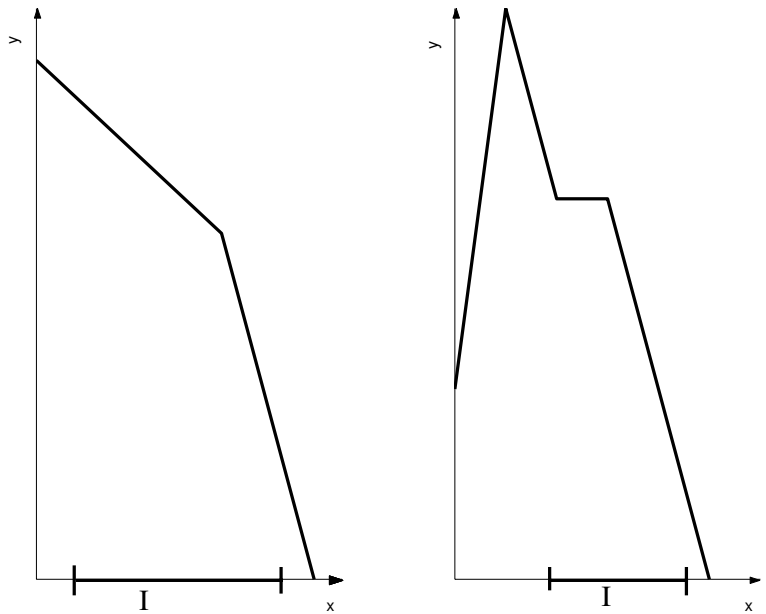
Analog:

f ist streng monoton fallend in I_2.

Beachte: Monotonie ist eine **Eigenschaft über Intervallen!**

Satz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Wenn $f : D \to \mathbb{R}$ auf D <u>streng</u> monoton steigend oder <u>streng</u> monoton fallend ist, so ist f injektiv.

Beispiel:



Die "linke Funktion" ist **streng monoton fallend auf** I und **injektiv**, die "rechte Funktion" ist **monoton fallend auf** I – sie ist konstant auf einem Teilintervall und damit auch **nicht injektiv** und **nicht streng monoton fallend**.

Die Umkehrung des Satzes gilt nicht!

Man zeichne sich die injektive (+ surjektive), aber unstetige und <u>nicht</u> monotone Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \begin{cases} x, & \text{falls } x \leq 0 \\ 1/x, & \text{falls } x > 0 \end{cases}$ auf!

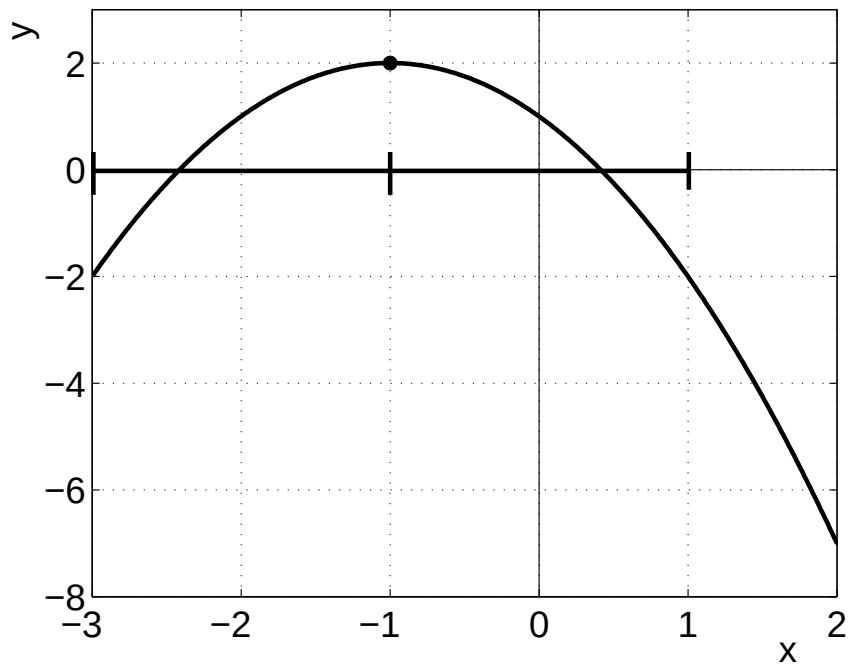
Definition *Beschränktheit* Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (speziell kann $n = 1$ sein). Ist der Wertebereich $f(D)$ von f

nach oben beschränkt,	dann heisst f *nach oben beschränkt*;
nach unten beschränkt,	dann heisst f *nach unten beschränkt*;
beschränkt,	dann heisst f *beschränkt*.

Z.B. ist $g(x) = -(x+1)^2 + 2$ als Funktion

$$g : \underbrace{[-3, 1]}_{D} \to \mathbb{R}$$

beschränkt, denn der Wertebereich von g ist $g([-3, 1]) = [-2, 2]$.



Definition: *Supremum, Infimum* Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (speziell kann $n = 1$ sein) nach oben beschränkt. Dann ist das Supremum der Wertemenge $f(D)$ endlich und wir definieren

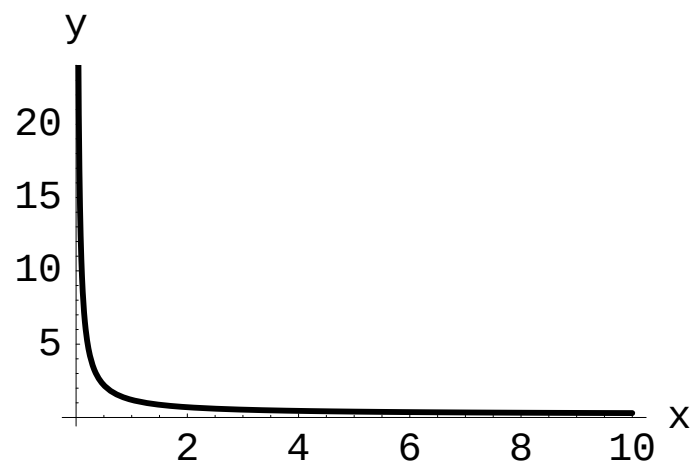
$$\sup_{x \in D} f(x) := \sup f(D)$$

sprechen vom *Supremum von f auf D*. Analog: Wenn f nach unten beschränkt ist, definieren wir $\inf_{x \in D} f(x) := \inf f(D)$ und sprechen vom *Infimum von f auf D*.

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{x}$, d.h.,

$$f : \underbrace{(0, +\infty)}_{D} \to \mathbb{R}.$$

Offenbar: $\inf_{x \in D} f(x) = 0$.
Es gibt aber *kein* $x_0 \in D$ mit $\inf_{x \in D} f(x) = f(x_0)$, $x \in D$.



<u>Minimum wird nicht angenommen!</u>

Definition: *Extrema* Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (speziell kann $n = 1$ sein). Die Zahl

$$\max_{x \in D} f(x) := \max f(D)$$

heisst *globales* oder *absolutes Maximum* von f auf D, die Zahl

$$\min_{x \in D} f(x) := \min f(D)$$

heisst *globales* oder *absolutes Minimum* von f auf D.

Dabei wird ein Element $x_0 \in D$ mit

$$f(x_0) = \max_{x \in D} f(x), \quad \text{d.h., } x_0 \in D \ \underline{\text{und}} \ f(x_0) \geq f(x) \ \forall x \in D,$$

Maximalstelle oder -punkt oder -lösung genannt. Analog spricht man von *Minimalstelle, –punkt, –lösung*, wenn $f(x_0) = \min_{x \in D} f(x)$.

Man spricht von einem *Extremum* als Sammelbegriff für Maximum und Minimum, analog von *Extremalstelle*.

Für die *Menge aller Maximalstellen* von f bezüglich D schreibt man

$$\boxed{\arg\max_{x \in D} \; f(x)} \qquad \text{oder} \qquad \operatorname{argmax}\{f(x) \,|\, x \in D\},$$

d.h. $x^* \in \arg\max_{x \in D} \; f(x)$ bedeutet, dass x^* eine Maximalstelle von f auf D ist. Analog schreibt man die *Menge aller Minimalstellen* von f bezüglich D als

$$\boxed{\arg\min_{x \in D} \; f(x)} \qquad \text{oder} \qquad \operatorname{argmin}\{f(x) \,|\, x \in D\},$$

d.h. $x^0 \in \arg\min_{x \in D} \; f(x)$ bedeutet, dass x^0 eine Minimalstelle von f auf D ist.

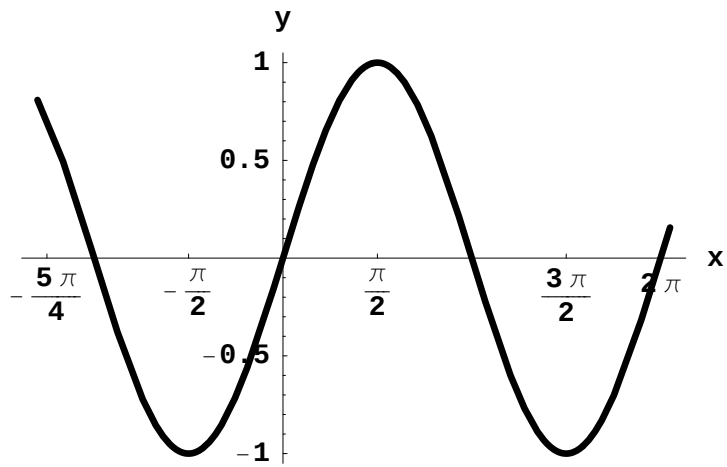
Beispiel: Man betrachte die Aufgabe

$$\textbf{Minimiere } f(x) := \sin x \quad \textbf{bezüglich } D := [-5\pi/4\,,\,2\pi].$$

Dann gilt

$$\min_{x\in D} f(x) = -1, \quad \arg\min_{x\in D} \; f(x) = \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\},$$

$$\max_{x\in D} f(x) = \;\; 1, \quad \arg\max_{x\in D} \; f(x) = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}.$$



Definition: Wir beschränken uns nun wieder auf den Fall $D \subseteq \mathbb{R}$.*
Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Die Menge

$$U_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x - x_0| < \varepsilon\}$$

heisst *ε–Umgebung von x_0*. Existiert zu einem Punkt $x_0 \in D$ eine ε–Umgebung, die ganz in D enthalten ist, so nennt man x_0 einen *inneren Punkt* von D.

Man sagt, dass *$f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ ein lokales Maximum* hat, falls

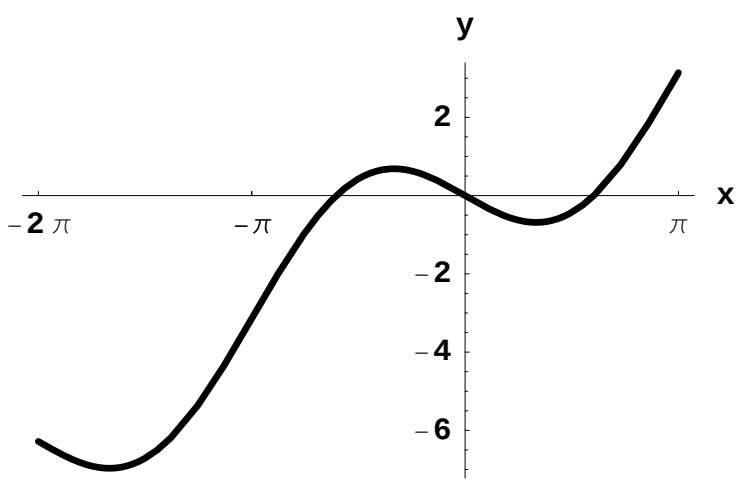
$$\text{ein } \varepsilon > 0 \text{ existiert, so dass } f(x_0) \geq f(x) \text{ für alle } x \in U_\varepsilon(x_0) \cap D$$

gilt. Wird das lokale Maximum von f in einem inneren Punkt x_0 des Definitionsbereiches D angenommen, so nennt man es häufig auch *relatives Maximum*. Die Begriffe *lokales und relatives Minimum* sind analog definiert.

*Für $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sind die Definitionen analog, man muss nur einen passenden Umgebungsbegriff im $\mathbb{R}^n$ definieren

Unmittelbare Folgerung: Ist $x_0 \in D$ Stelle eines globalen Minimums (Maximums) von $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so ist x_0 auch Stelle eines lokalen Minimums (Maximums) von f. Ist x_0 überdies innerer Punkt von D, so ist es auch Stelle eines relativen Minimums (Maximums) von f.

Beispiel: Wir betrachten $\quad x \in D = [-2\pi, \pi] \mapsto f(x) = x - 2\sin x.$



Globales Minimum von f auf D:

$$f(-2\pi + \pi/3) = -2\pi + \pi/3 - \sqrt{3} \approx -6.97.$$

(auch relatives Minimum!)

Globales Maximum von f auf D:

$$f(\pi) = \pi.$$

(kein relatives Maximum!)

Im Randpunkt $x = -2\pi$ hat f ein lokales (aber nicht relatives) Maximum. In $x = -\pi/3$ hat f ein relatives Maximum, in $x = \pi/3$ ein relatives Minimum – vgl. die Zeichnung; für die analytische Berechnung benötigen wir das Differentialkalkül (siehe §5).

Definition *Symmetrie* Sei $0 \in D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heisst *gerade*, falls

$$f(-x) = f(x) \text{ für alle } x \in D,$$

ungerade, falls

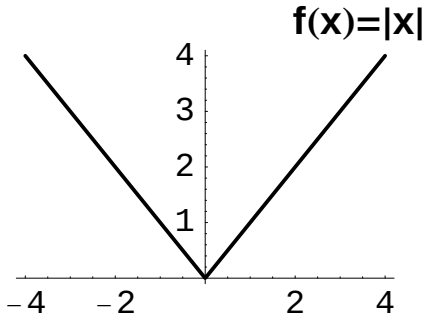
$$f(-x) = -f(x) \text{ für alle } x \in D.$$

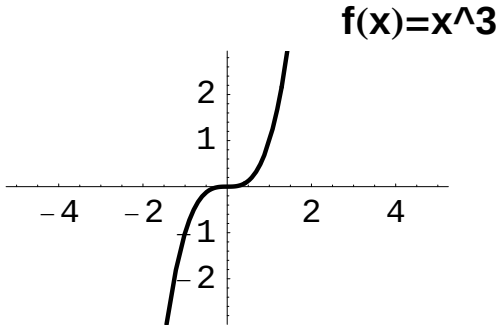
Beispiele für gerade Funktionen

$$f(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R}; \quad f(x) = |x|,\ x \in \mathbb{R}; \quad f(x) = \cos x,\ x \in \mathbb{R}.$$

Beispiele für ungerade Funktionen

$$f(x) = x,\ x \in \mathbb{R}; \quad f(x) = x^3,\ x \in \mathbb{R}; \quad f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}.$$





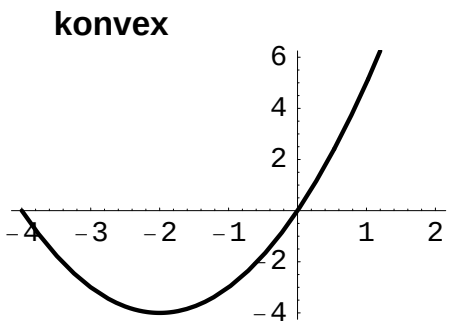
Definition *Krümmung* Sei $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion und $I \subseteq D$ ein Intervall. Gilt

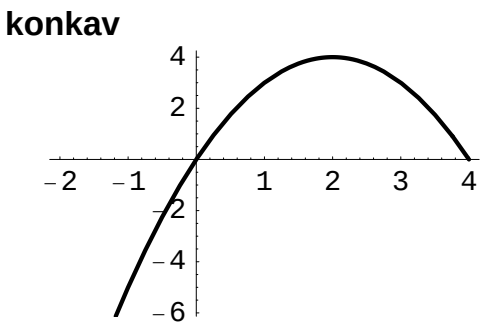
$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$$

$$\text{für alle } x_1, x_2 \in I \text{ und alle } \alpha \in [0,1],$$

so heisst f *konvex* auf I. Man nennt f *konkav* auf I, wenn $x \mapsto -f(x)$ konvex auf I ist.

Anschauliche Definition: Liegt die Verbindungsstrecke zwischen je zwei *beliebigen* Punkten des Graphen von f **oberhalb von** gph f (bzw. **unterhalb von** gph f), so ist f konvex (bzw. konkav).

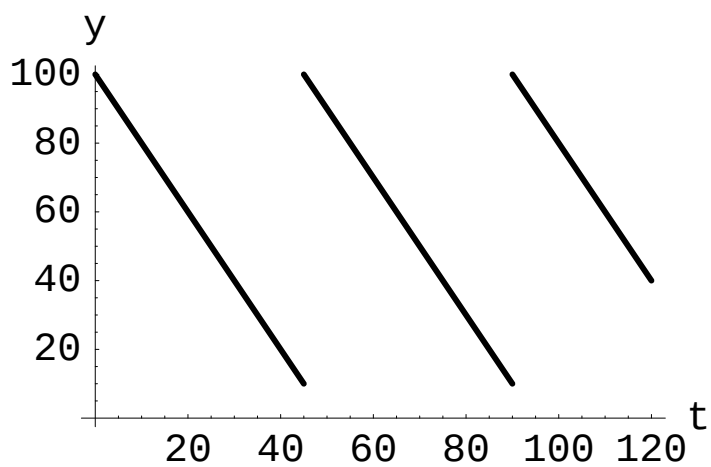




Definition: Periodizität Sei $D = \mathbb{R}$ oder $D = [0, +\infty)$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heisst *periodisch mit der Periode $T > 0$*, falls

$$f(x + T) = f(x) \quad \forall x \in D.$$

Beispiele: Winkelfunktionen wie $f(x) = \sin(4x)$ (Periode $\frac{\pi}{2}$) oder folgende elementare Lagerhaltungsfunktion: Maximalbestand S wird in einer Periode T gleichmässig abgetragen mit einer Rate α auf einen Lagerbestand $s < S$ und gleich wieder aufgefüllt (also $T = (S - s)/\alpha$), d.h.



Funktion $y = 100 - 2t$, $0 \leq t \leq T$, periodisch fortgesetzt mit Periode $T = 45$, d.h., $S = 100$, $s = 10$ und $\alpha = 2$.

Definition: *Nullstelle* Sei $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ein Punkt $x_0 \in D$ mit der Eigenschaft

$$f(x_0) = 0$$

heisst *(reelle) Nullstelle von f*.

Beispiele: Die quadratische Funktion

$$f(x) = x^2 + x + 1,\ x \in \mathbb{R},$$

besitzt keine reelle Nullstelle, denn $f(x) = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Man sieht das auch, wenn man versucht, die Gleichung $x^2 + x + 1 = 0$ nach der Diskriminantenformel aufzulösen (Übungsaufgabe).

Die Funktion

$$f(x) = \sin x,\ x \in \mathbb{R},$$

besitzt unendlich viele Nullstellen, nämlich $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Bemerkungen:

Die Eigenschaften *monoton*, *konvex/konkav*, *gerade/ungerade* sind *Eigenschaften über Intervallen* (also im allgemeinen über Teilintervallen von D), man muss also immer dazusagen, **wo** sie erfüllt sind.

Es gibt weitere Eigenschaften reeller Funktionen, die wichtig sind: Suche nach Unstetigkeitsstellen, Polstellen, Asymptoten – darauf kommen wir später zurück.

Wir haben an dieser Stelle die Eigenschaften nur *zusammengestellt*. Um sie im Einzelfalle zu *überprüfen*, müssen unbedingt weitere Hilfsmittel bereitgestellt werden! Wir kommen auch auf die Ihnen aus der Schule für differenzierbare Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bekannten Kriterien zurück wie z.B.

$f'(x) > 0 \ \forall x \in I$ (I Intervall) $\Rightarrow f$ ist streng monoton wachsend.

$f'(a) = 0$ und $f''(a) < 0 \Rightarrow f$ hat in a ein relatives Maximum.

4.2. Einige elementare reelle Funktionen [Ro §4.5], [SH §4]

Im Brückenkurs finden Sie die Abschnitte

- Polynome (inkl. lineare und quadratische Funktionen),
- gebrochen rationale Funktionen,
- Potenzfunktionen,
- trigonometrische Funktionen.

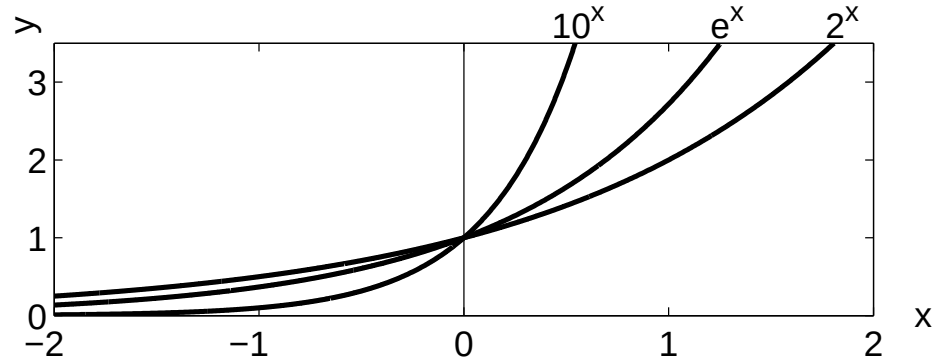
Exponential– und Logarithmusfunktionen

Definition Eine Funktion $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$ (bei gegebenem $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$) heisst *Exponentialfunktion mit der Basis a*. Ihr Wertebereich ist $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$.

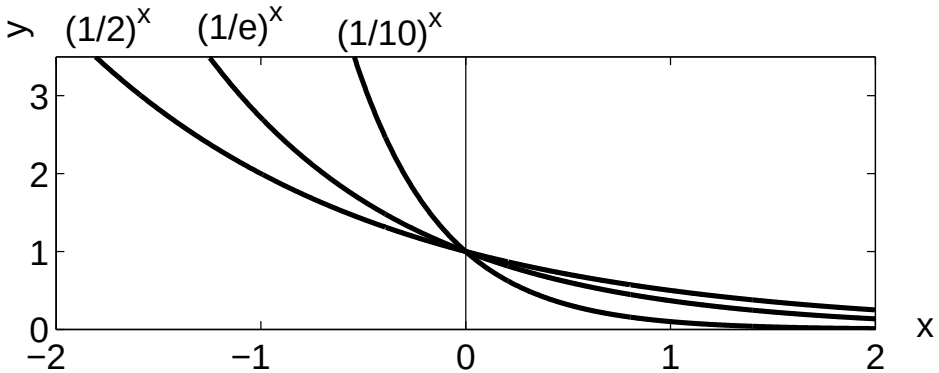
Der Fall $a = 1$ ist uninteressant, denn $1^x \equiv 1$.

Satz

1. Falls $a > 1$ gilt, so ist $f(x) = a^x$ über $\mathbb{R}$ streng monoton steigend.



2. Falls $0 < a < 1$, so ist $f(x) = a^x$ über $\mathbb{R}$ streng monoton fallend.



Beweis: Folgt sofort aus $a^{x+\varepsilon} = a^\varepsilon a^x$, $\varepsilon > 0$.

Folgerung: Aus dem vorherigen Satz und dem Satz über die Injektivität streng monotoner Funktionen folgt sofort:

Für jedes $a > 0$ mit $a \neq 1$ ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \longmapsto a^x$ injektiv und folglich bijektiv als Funktion von $\mathbb{R}$ auf $W = (0, +\infty)$. Es existiert also eine Umkehrfunktion.

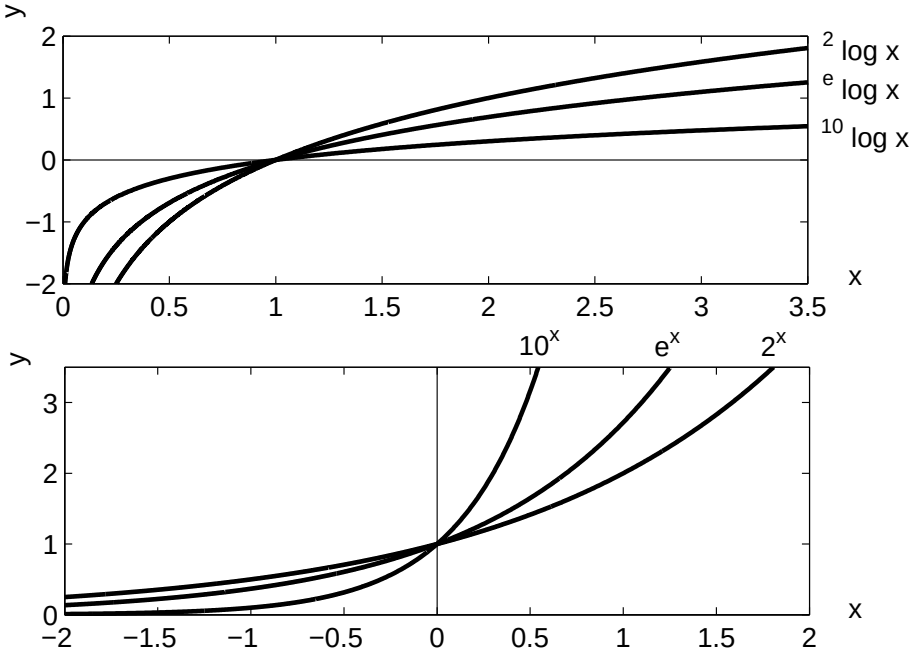
Definition: Sei $a > 0$, $a \neq 1$. Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ heisst *Logarithmusfunktion zur Basis a*, **Symbol:**

$$f^{-1}(y) = {}^{a}\log y \qquad \text{oder} \qquad f^{-1}(y) = \log_a y\,.$$

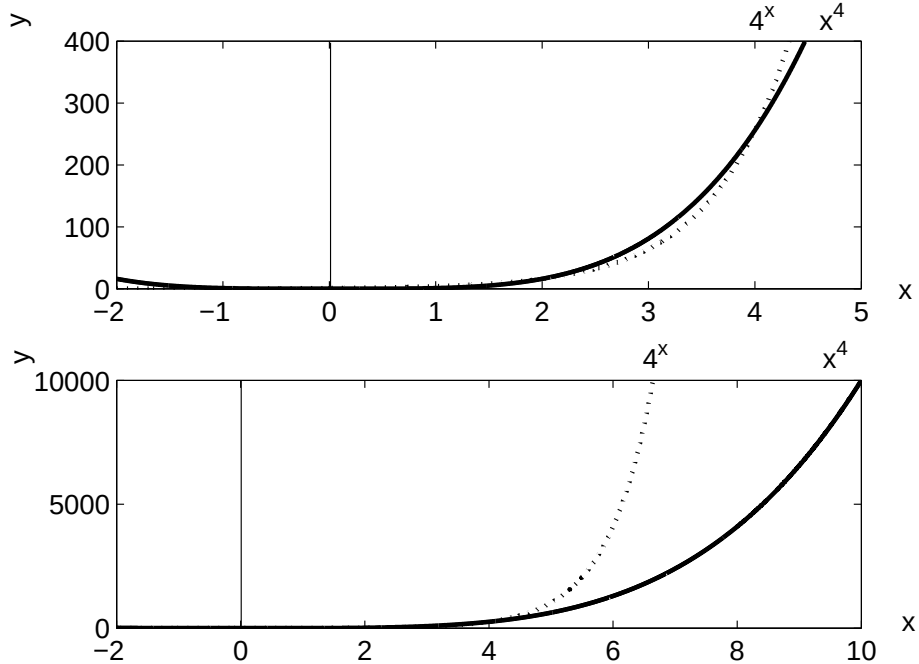
Dabei ist f^{-1} eine Funktion von $(0, +\infty)$ auf $\mathbb{R}$.

Spezielle Bezeichnungen: $\ln x$ - *Logarithmus naturalis* (Basis e), $\lg x$ - *Zehnerlogarithmus*. Zu den Rechengesetzen vgl. Brückenkurs.

Logarithmus- und Exponentialfunktionen



Potenz- und Exponentialfunktion



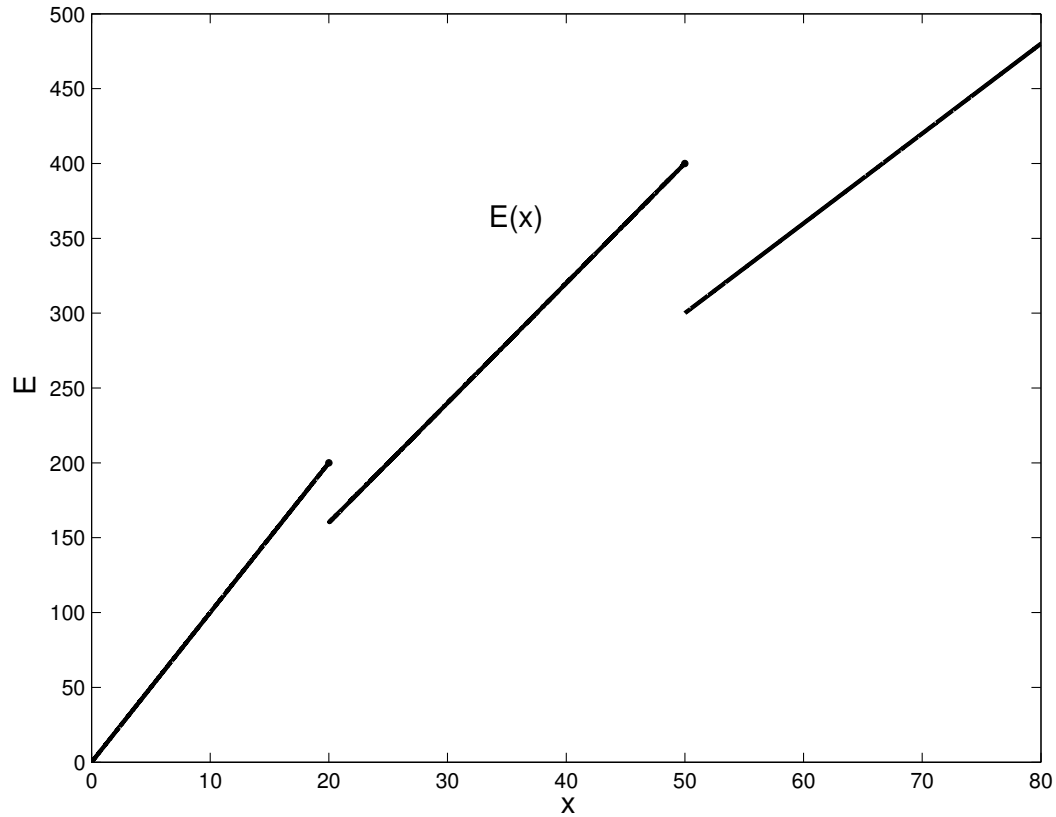
4.3. Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

[Ro §5], [SH §6.5 , §§7.7-7.8]

Einführungsbeispiel 1: Beim Verkauf eines Produkts sei der Preis pro Mengeneinheit (ME) folgendermassen gestaffelt (Mengenrabatt):

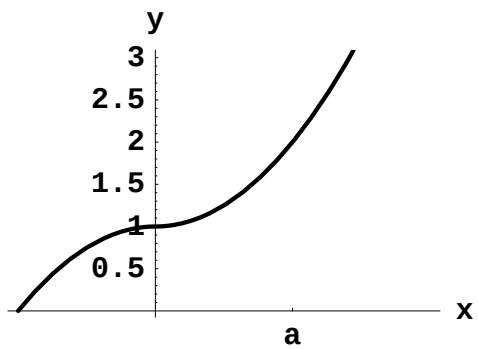
	$x \leq 20$	$20 < x \leq 50$	$x > 50$
Preis pro ME	10	8	6

Funktion des Erlöses E(x) für x ME

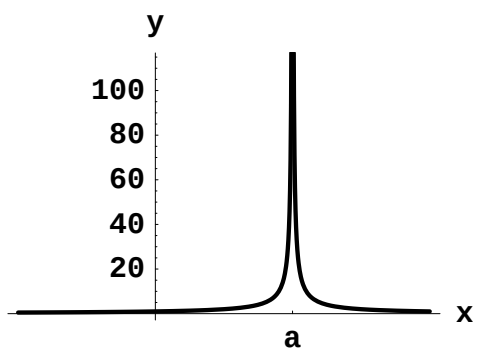


Bei $x = 20$ bzw. $x = 50$ "springt" $E(x)$.

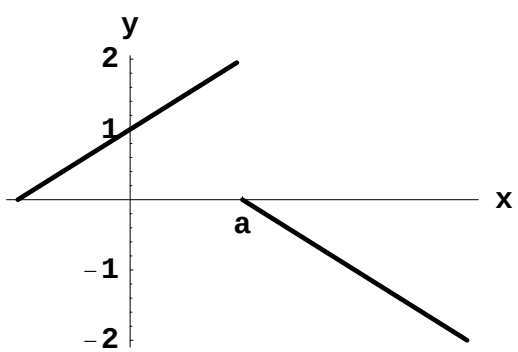
Problem 1 Wie ist das *lokale* Verhaltens einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, d.h., wie verhält sich f "in der Nähe" eines Punktes $a \in D$ bzw. $a \in \mathbb{R} \setminus D$?



$a \in D$ <u>und</u> kleine Abweichung der Argumente $|x - a|$ impliziert kleine Abweichung der Funktionswerte $|f(x) - f(a)|$ (Stetigkeit)



$f(a)$ nicht erklärt <u>und</u> $x \to a$ impliziert $f(x) \to +\infty$ (Polstelle $\Rightarrow$ Unstetigkeit)

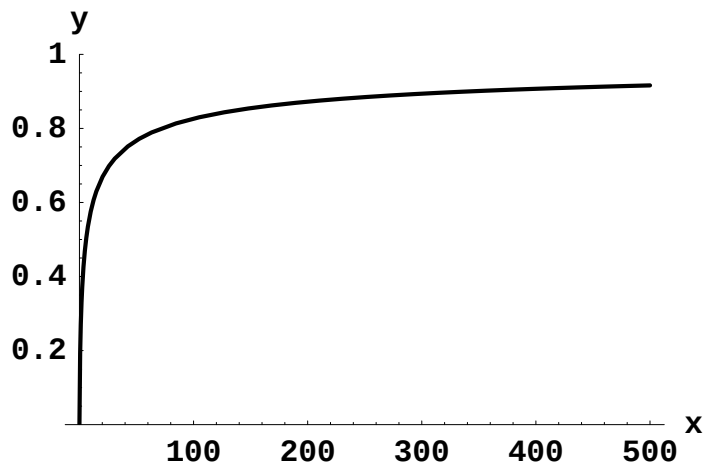


$f(a)$ kann definiert oder nicht definiert sein <u>und</u> die Funktionswerte $f(x)$ "springen" bei $x = a$ (Sprungstelle $\Rightarrow$ Unstetigkeit)

Einführungsbeispiel 2:

In der CES-Funktion $y = (x_1^{-0.5} + x_2^{-0.5})^{-2}$ setzen wir speziell $x_1 := 1$, $x_2 := x$ und erhalten die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{(1 + \frac{1}{\sqrt{x}})^2} \qquad (x > 0)$$



Problem 2

$$x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad f(x) \to ???$$

Definition: *Grenzwerte von Funktionen*

A) für $x \to x_0$ Sei $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$ und $f_0 \in \mathbb{R}$.

(1) Wenn $(x_0 - \epsilon,\ x_0 + \epsilon) \backslash \{x_0\} \subseteq D$ und wenn <u>für jede Folge</u>

$\{x_n\} \subset (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \backslash \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ gilt, dass $f(x_n) \to f_0$,

so heisst f_0 *Grenzwert von f für $x \to x_0$* (oder "in x_0").

Schreibweise: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f_0$

(2) Wenn $(x_0, x_0 + \epsilon) \subseteq D$ und <u>für jede Folge</u>

$\{x_n\} \subset (x_0, x_0 + \epsilon)$ mit $x_n \to x_0$ gilt, dass $f(x_n) \longrightarrow f_0$,

so heisst f_0 *rechtsseitiger Grenzwert von f* für $x \to x_0$ (oder "in x_0").

Schreibweise: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f_0$.

(3) Ersetzt man in (2) überall $(x_0,\ x_0+\epsilon)$ durch $(x_0-\epsilon,\ x_0)$, so heisst f_0 *linksseitiger Grenzwert von f* für $x \to x_0$ (oder "in x_0").

Schreibweise: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f_0.$

B) für $x \to \pm\infty$ Sei $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f_0, a, b \in \mathbb{R}$.

(4) Wenn $[a, +\infty) \subseteq D$ und wenn <u>für jede monoton wachsende Folge</u>

$$\{x_n\} \subset [a, +\infty) \text{ mit } x_n \to +\infty \text{ gilt, dass } f(x_n) \to f_0,$$

so heisst f_0 *Grenzwert von f* für $x \to +\infty$.

Schreibweise: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f_0$

(5) Wenn $(-\infty, b] \subseteq D$ und wenn <u>für jede monoton fallende Folge</u>

$$\{x_n\} \subset (-\infty, b] \text{ mit } x_n \to -\infty \text{ gilt, dass } f(x_n) \to f_0,$$

so heisst f_0 Grenzwert von f für $x \to -\infty$.

Schreibweise: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = f_0$

C) Uneigentliche Grenzwerte

Lässt man in den Definitionen (1) - (5) einen uneigentlichen Grenzwert für die Folgen $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ zu, also $f_0 = \pm\infty$, so schreibt man dann

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty\,, \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty\,, \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{usw.}$$

Wichtige Bemerkungen:

Ein Grenzwert oder uneigentlicher Grenzwert von f für $x \to x_0$ bzw. $x \to \pm\infty$ **existiert genau dann, wenn für alle** Folgen der Argumente $x_n \to x_0$ bzw. $x_n \to \pm\infty$ (die den jeweilen Zusatzforderungen genügen) die Folgen $\{f(x_n)\}$ der zugehörigen Funktionswerte **ein und denselben Grenzwert oder uneigentlichen Grenzwert** f_0 haben!

In den Definitionen (1)-(3) **kann** x_0, **aber muss nicht** Element des Definitionsbereichs D von f sein, daher betrachten wir nur Folgen $x_n \to x_0$ mit $x_n \neq x_0 \quad (\forall n)$.

Andere übliche Schreibweisen in der Literatur:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \quad\equiv\quad \lim_{x\uparrow x_0} f(x) \quad\equiv\quad \lim_{x\to x_0-0} f(x)$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) \quad\equiv\quad \lim_{x\downarrow x_0} f(x) \quad\equiv\quad \lim_{x\to x_0+0} f(x)$$

Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen:

gelten sinngemäss wie bei Grenzwerten von Folgen, vgl. [SH §6.5], [Ro Sätze 5.3, 5.4]. Zum Beispiel: Wenn die (eigentlichen) Grenzwerte $f_0 := \lim_{x\to x_0} f(x)$ und $g_0 := \lim_{x\to x_0} g(x)$ existieren, so gilt $\lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = f_0 + g_0$ und $\lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x) = f_0 \cdot g_0$.

Vorsicht aber bei uneigentlichen Grenzwerten! Das kann schiefgehen!
Beispiel:

$$\lim_{x\to+\infty} e^x \cdot e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} e^0 = 1, \quad \text{aber} \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$$

Für unbestimme Ausdrücke der Form $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty, 0^\infty, \infty^0, \infty-\infty$ vgl. Regeln von de L'Hospital.

Analyse des Einführungsbeispiels 1 (Erlösfunktion).

Es zeigt: Selbst wenn $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ <u>und</u> $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ existieren, muss $\lim_{x \to x_0} f(x)$ nicht existieren!

Betrachte die Stelle $x_0 = 20$ (analog ginge $x_0 = 50$):

$$E(x) = \begin{cases} 10x, & \text{falls } \ 0 \leq x \leq 20 \\ 8x, & \text{falls } 20 < x \leq 50 \end{cases}$$

Offenbar gilt

$$\lim_{x \to 20^-} E(x) = 200, \qquad \lim_{x \to 20^+} E(x) = 160.$$

Für die Folge

$$x_n = \begin{cases} 20 - \frac{1}{n}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 20 + \frac{1}{n}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

gilt

$$E(x_n) = \begin{cases} 200 - \frac{10}{n}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 160 + \frac{8}{n}, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

also hat $\{E(x_n)\}$ keinen Grenzwert für $n \to \infty$.

Das Einführungsbeispiel 1 hat deutlich gezeigt, dass es **nicht** reicht, aus der Eigenschaft

$$x_n \to x_0 \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \to f_0$$

für eine spezielle Folge $\{x_n\}$ auf die Existenz eines Grenzwerts einer Funktion f in x_0 zu schliessen.

Interessantes Beispiel zu diesem Fakt für $x \to +\infty$:

Frage: $\boxed{\text{Existiert } \lim\limits_{x \to +\infty} \sin x \text{ ?}}$ **Nein!**

Spezielle Folge Nr. 1 sei $x_n = n \cdot \pi$ ($\to +\infty$ mit $n \to \infty$):

$$f(x_n) \equiv 0 \longrightarrow 0.$$

Spezielle Folge Nr. 2 sei $x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ ($\to +\infty$ mit $n \to \infty$):

$$f(x_n) \equiv 1 \longrightarrow 1.$$

Satz f hat in x_0 *genau dann* einen Grenzwert f_0, d.h. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f_0$, *wenn* $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ existieren und beide mit f_0 zusammenfallen.

Beispiel zur Illustration:

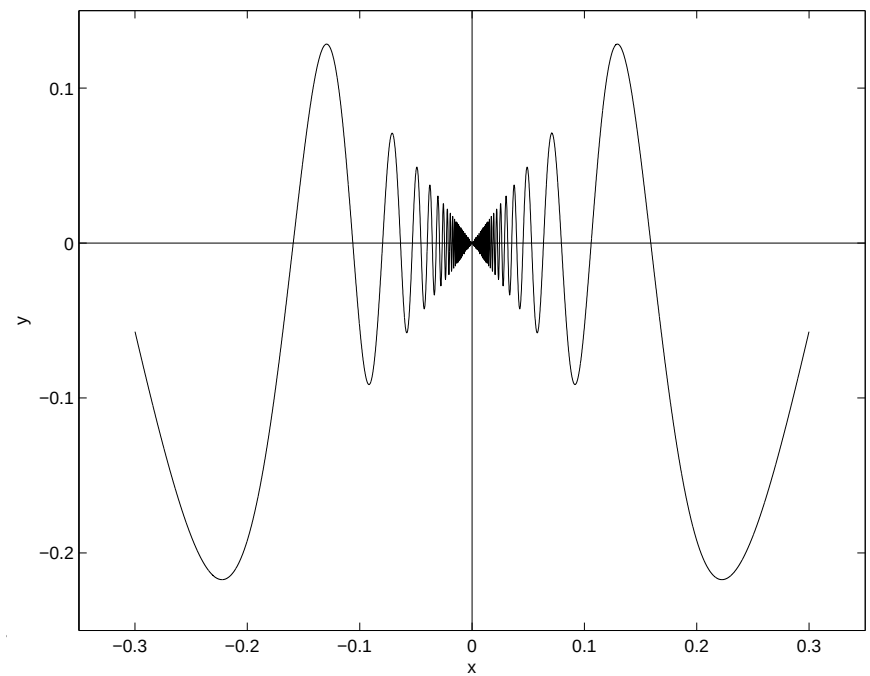
$$\lim_{x \to 0} f(x) \text{ für } f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \ x \neq 0.$$

Wegen $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ gilt

$$-|x| \leq f(x) \leq |x|$$

und folglich

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$



Analyse des Einführungsbeispiels 2: Dort war gegeben

$$f(x) = \frac{1}{(1+\frac{1}{\sqrt{x}})^2} \qquad (x > 0).$$

Behauptung:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1.$$

Beweis: Wähle eine beliebige monoton wachsende Folge $x_n \to +\infty$ für $n \to \infty$, d.h., zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $n(\epsilon)$, so dass

$$x_n > \frac{1}{\epsilon^2}, \text{ falls } n \geq n(\epsilon).$$

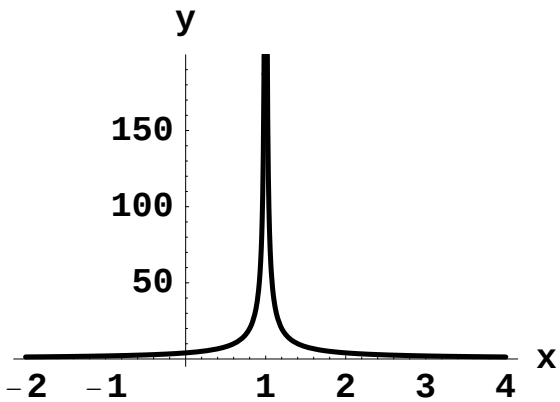
$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x_n}} < \epsilon \quad \forall n \geq n(\epsilon)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x_n}} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{\sqrt{x_n}})^2} = \frac{1}{(1+\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x_n}})^2} = 1$$

nach den Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen.

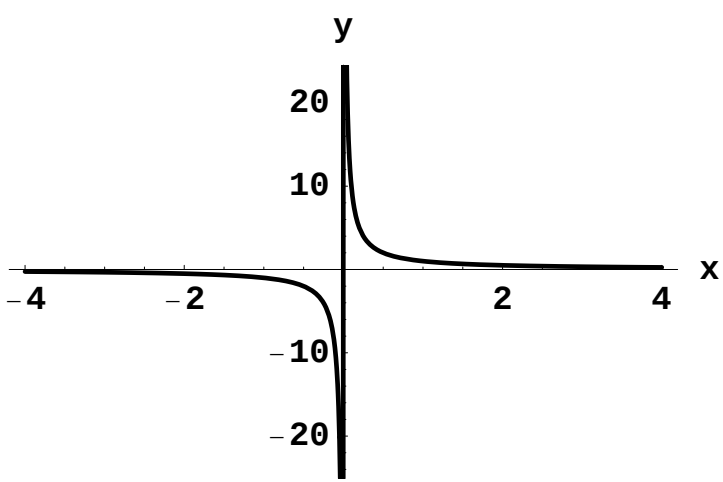
Beispiel: *Polstellen*



Betrachte $f(x) = \frac{4}{|1-x|}, \quad x_0 = 1.$
Offenbar gilt

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$$

$x_0 = 1$ *Polstelle mit gleichem Vorzeichen*



Betrachte $g(x) = \frac{1}{x}, \; x_0 = 0.$
Offenbar gilt

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$$

$x_0 = 0$ *Polstelle mit wechselndem Vorzeichen*

Weitere Beispiele:

1. Für $a > 1,\ \beta \geq 0$ gilt: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^\beta}{a^x} = 0.$ $\left(\frac{\text{Potenzfunktion}}{\text{Exponentialfunktion}}\right)$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e.$ (Zahl e)

3. Verknüpfungen von Grenzwerten und Substitution der Variablen

$\varphi := \lim\limits_{x \to +\infty} (1 + \frac{4}{x})^x = ?$

Setze $y = \frac{1}{4}x$, d.h. $x \to +\infty \quad \Leftrightarrow \quad y \to +\infty$. Dann gilt nach Substitution und Potenzgesetzen

$$(1 + \tfrac{4}{x})^x = (1 + \tfrac{1}{y})^{4y} = [(1 + \tfrac{1}{y})^y]^4.$$

Nach den Rechengesetzen für Grenzwerte und 2. folgt somit

$$\varphi = \lim_{y \to +\infty} [(1 + \tfrac{1}{y})^y]^4 = [\lim_{y \to +\infty} (1 + \tfrac{1}{y})^y]^4 = e^4.$$

4. Andere übliche Substitutionen:

$y := 1/x$, d.h. $x \to +\infty \Leftrightarrow y \to 0^+$,

$y := \ln x$, d.h. $x \to +\infty \Leftrightarrow y \to +\infty$.

Definition *Stetigkeit in einem Punkt* Seien $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $(x_0 - \epsilon,\ x_0 + \epsilon) \subseteq D$, also speziell $x_0 \in D$. Die Funktion f heisst *stetig in x_0*, wenn

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

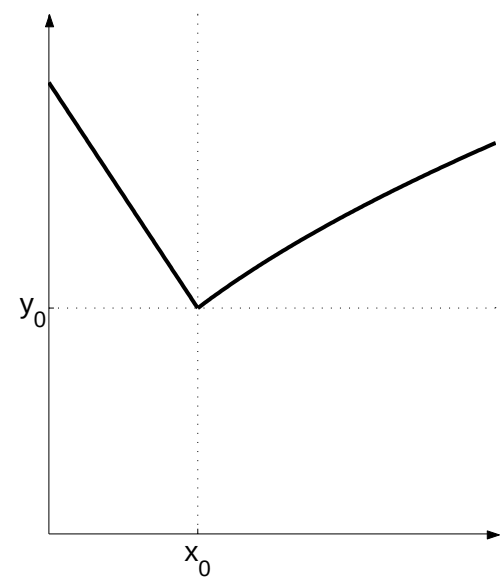
Also ist f stetig in x_0 genau dann, wenn

$a)$ $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert und

$b)$ dieser Limes gleich dem Funktionswert $f(x_0)$ ist.

Geometrische Interpretation: Der Funktionsgraph ist an der Stelle x_0 nicht unterbrochen:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 = f(x_0).$$



Definition *Stetigkeit auf einem Intervall* Seien $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $I \subseteq D$ ein Intervall. Die Funktion f heisst *stetig auf I*, wenn folgendes gilt:

(i) f ist in jedem inneren Punkt x_0 von I stetig.

(ii) Enthält I den linken Randpunkt a, so ist f *rechtsseitig stetig in a*, d.h.

$$f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x).$$

(iii) Enthält I den rechten Randpunkt b, so ist f *linksseitig stetig in b*, d.h.

$$f(b) = \lim_{x \to b^-} f(x).$$

Wichtige stetige Funktionen:

Stetig auf $\mathbb{R}$:

$P_n(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$ — *Polynome*

$\sin x, \quad \cos x$ — *Sinus- und Kosinusfunktion*

a^x (falls $a > 0$) — *Exponentialfunktionen*

Stetig auf allen Teilintervallen des natürlichen Definitionsbereichs D:

$\dfrac{P_n(x)}{P_m(x)}, \quad D = \{x | P_m(x) \neq 0\}$ — *gebrochen rationale Funktionen*

x^α $(\alpha > 0), \quad D = [0, +\infty)$ — *Potenzfunktionen*

${}^a\log x$ $(a > 0,\ a \neq 1), \quad D = (0, +\infty)$ — *Logarithmusfunktionen*

Satz: Algebraische Verknüpfungen stetiger Funktionen

[Ro Satz 5.6], [SH 7.7 (4)]

Seien f und g zwei reelle Funktionen, die an der Stelle $x_0 \in D$ (bzw. auf dem Intervall $I \subseteq D$) stetig sind.

Dann sind auch die folgenden Funktionen an der Stelle x_0 (bzw. auf dem Intervall I) stetig:

$$\begin{array}{lrcll}
1. & (f+g)(x) & := & f(x)+g(x), & x \in D, \\
2. & (f-g)(x) & := & f(x)-g(x), & x \in D, \\
3. & (f \cdot g)(x) & := & f(x) \cdot g(x), & x \in D, \\
4. & (\frac{f}{g})(x) & := & \frac{f(x)}{g(x)}, & x \in D,
\end{array}$$

wobei in Punkt 4. $g(x) \neq 0$ für x in einer Umgebung von x_0 (bzw. auf dem ganzen Intervall I) vorauszusetzen ist.

Satz: Zusammensetzung stetiger Funktionen

[Ro Satz 5.7], [SH 7.7 (4)]

Seien I_1, I_2 Intervalle. Falls $f : I_1 \to \mathbb{R}$ und $g : I_2 \to \mathbb{R}$ stetig auf I_1 bzw. I_2 sind und falls

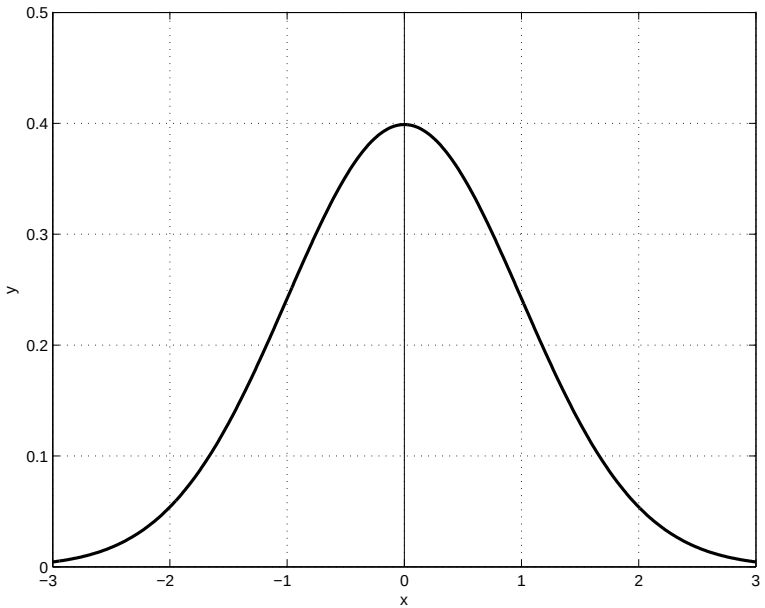
$$W_f = f(I_1) \subseteq I_2 = D_g,$$

so ist die zusammengesetzte Funktion

$$g \circ f(x) := g(f(x)), \; x \in I_1,$$

stetig auf I_1.

Beispiel: Dichtefunktion der Standardnormalverteilung



$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

ist zusammengesetzt aus

$$f(x) = -\frac{1}{2}\, x^2 \text{ und}$$

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{y}, \; y = f(x).$$

"Gauss'sche Glockenkurve"

f ist stetig auf $\mathbb{R}$ als Polynom 2. Grades. g ist stetig auf $\mathbb{R}$ als Produkt einer Konstante und der Exponentialfunktion e^y. Es gilt

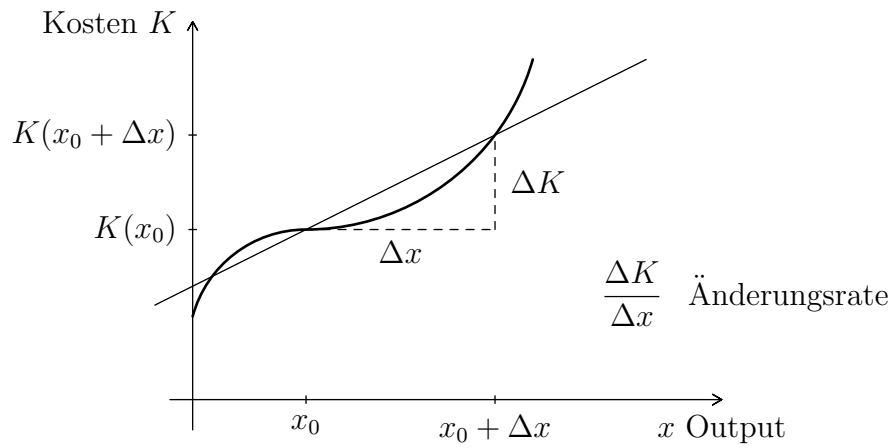
$$W_f = (-\infty, 0] \subset \mathbb{R} = D_g.$$

Folglich ist die verkettete Funktion $h(x) := g(f(x))$ definiert auf $\mathbb{R}$ und dort stetig.

4.4. Ableitungen

[SH §§6.1-6.5], [Ro §6.1]

Beispiel A1 Kostenfunktion (ertragsgesetzlich)



Mit $\Delta K = K(x_0 + \Delta x) - K(x_0)$ ist

$$\frac{\Delta K}{\Delta x} = \frac{K(x_0 + \Delta x) - K(x_0)}{\Delta x}$$

der Differenzenquotient (Anstieg einer Sekante).

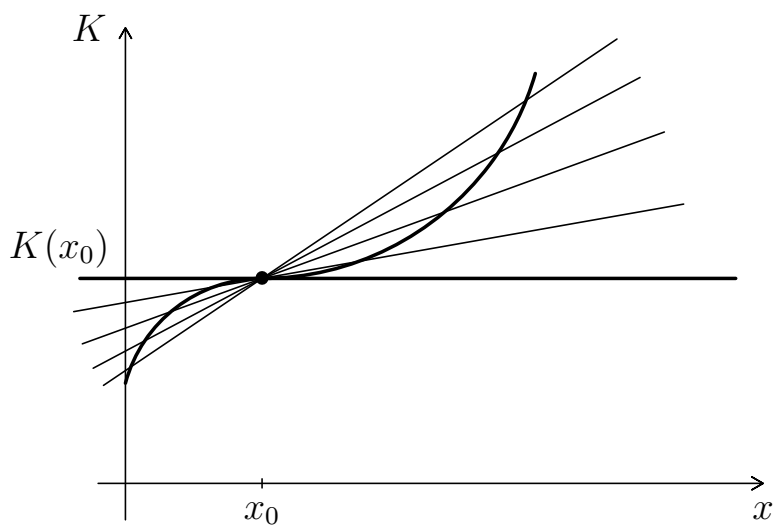
Definition des Differentialquotienten

analytisch: Übergang zum Grenzwert der Differenzenquotienten

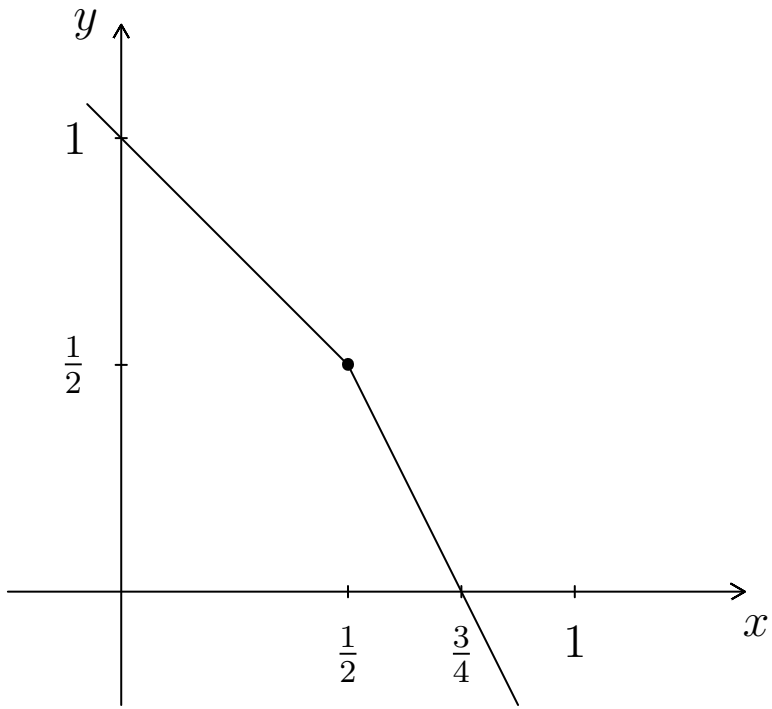
$$\frac{K(x_0 + \Delta x) - K(x_0)}{\Delta x} \quad \longrightarrow \quad "K'(x_0)" \qquad \text{mit } \Delta x \to 0?$$

Existiert dieser Grenzwert? Wie berechnet man ihn?

geometrisch: Gibt es eine Gerade durch den Punkt $(x_0, K(x_0))$, deren Steigung gleich dem Grenzwert der Steigungen aller Sekanten durch $(x_0, K(x_0))$ ist? Wenn ja, so ist das eine *Tangente*.



Beispiel A2: Funktion mit "Knick"



$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{falls } x < \dfrac{1}{2} \\ \frac{3}{2} - 2x, & \text{falls } x \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$x_0 = \frac{1}{2}$ (Knickstelle)

Alle Sekanten durch $(x_0, f(x_0)) = (\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2})$ haben den Anstieg -1 oder -2, d.h.

$$\frac{\Delta f(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = \begin{cases} -1, & \text{falls } \Delta x \text{ negativ} \\ -2, & \text{falls } \Delta x \text{ positiv} \end{cases}$$

Der Grenzwert des Differenzenquotienten für $\Delta x \to 0$ existiert nicht!

Definition f heisst *differenzierbar an der Stelle* x_0, falls

i) ein $\delta > 0$ existiert, so dass f auf dem Intervall $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ definiert ist,

ii) der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert.

Dieser Grenzwert heisst *(erste) Ableitung* von f an der Stelle x_0 [auch *Differentialquotient* von f an der Stelle x_0].

Symbole: $f'(x_0)$ oder $\dfrac{df}{dx}(x_0)$ oder $\dfrac{df(x_0)}{dx}$ oder $\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$

Mit

$$\Delta x := x - x_0, \quad \Delta f(x_0) := f(x) - f(x_0)$$

ist $f'(x_0)$ in der Tat der Grenzwert der Differenzenquotienten:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Interpretation der Ableitung als lineare Approximation

Man ersetzt **lokal** die **nichtlineare Funktion** (man könnte auch sagen: das **nichtlineare Modell**)

$$y = f(x), \qquad \text{wobei } f \text{ differenzierbar in } x_0 \text{ ist,}$$

durch die **lineare Funktion** (d.h., das **lineare Modell**)

$$y = l(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

und macht dabei den *Fehler* (abhängig von der Abweichung $\Delta x = x - x_0$)

$$o(x - x_0) := f(x) - l(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

Man macht also nach Definition der Ableitung $f'(x_0)$ in x_0 den

$$\textit{relativen Fehler} \quad \frac{o(x - x_0)}{x - x_0} \qquad \text{mit} \quad \frac{o(x - x_0)}{x - x_0} \to 0 \quad \text{für } x \to x_0.$$

Definition. 1. Man sagt: Die Funktion l *approximiert* f *linear in* x_0.

2. Die durch $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ definierte Gerade heisst *Tangente an den Graphen von* f *im Punkt* $(x_0, f(x_0))$.

Zurück zu Beispiel A1: Sei dort $K(x) = 4 + \frac{1}{2}x^3$, $x_0 = 2$:

$$\begin{aligned} K'(x_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 + \frac{1}{2}(2 + \Delta x)^3 - 8}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-4 + \frac{1}{2}(8 + 12\Delta x + 6(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6\Delta x + 3(\Delta x)^2 + \frac{1}{2}(\Delta x)^3}{\Delta x} \;=\; 6\,. \end{aligned}$$

Die lineare Approximation l von K in $x_0 = 2$ ist

$l(x) := K(x_0) + K'(x_0)(x - x_0) = 8 + 6(x - 2)$, d.h. $l(x) = -4 + 6x$.

Der Fehler ist $o(x - x_0) := K(x) - l(x) = 8 + \frac{1}{2}x^3 - 6x$, d.h.,

$$\frac{o(x - x_0)}{x - x_0} = \frac{\frac{1}{2}x^3 - 6x + 8}{x - 2} = \frac{1}{2}x^2 + x - 4 \to 0 \quad \text{für } x \to 2.$$

Die Tangente an $\operatorname{gph} K$ in $(x_0, K(x_0)) = (2, 8)$ ist definiert durch

$$y = -4 + 6x.$$

Weitere Definitionen: Eine auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definierte reellwertige Funktion f heisst *differenzierbar auf I*, wenn f in jedem Punkt $x_0 \in I$ differenzierbar ist. In diesem Falle nennt man die Funktion $x \in I \mapsto y = f'(x)$ die *(1.) Ableitung von f*. Ist die Funktion f' wieder differenzierbar in $x_0 \in I$, so heisst die Ableitung von f' *2. Ableitung von f in x_0*, Symbol: $f''(x_0)$. Existiert $f''(x)$ für alle $x \in I$, so heisst $x \in I \mapsto z = f''(x)$ die *2. Ableitung von f*.

Analog wird für $n > 2$ die *n-te Ableitung $f^{(n)}$* definiert. Man schreibt auch $f^{(1)}$ statt f' und $f^{(2)}$ statt f''.

Sprechweisen in der Ökonomie: Bei einer ökonomischen Funktion f deuten die Bezeichnungen

Grenz- ... oder *marginale ...*

immer auf die (erste) Ableitung $x \mapsto f'(x)$ hin.
Beispiele: Grenzkosten, Grenznachfrage, marginaler Steuersatz etc.

Partielle Ableitungen bei Funktionen in 2 Variablen

[SH §11.2], [Ro §7.3]

Einführungsbeispiel: Sei $f(x,y) = 100x^2 + 100y$, $D_f = \mathbb{R}^2$.
Fixieren wir $y = y_0$, entsteht eine Funktion nur in der Variablen x (denn y_0 wird als Konstante angesehen), nämlich

$$\varphi(x) := f(x, y_0) = 100x^2 + 100y_0,$$

ihre Ableitung an der Stelle $x = x_0$ ist $\varphi'(x_0) = 200x_0$ und heisst *partielle Ableitung von f nach x an der Stelle (x_0, y_0)*;

neues Symbol: $f_x(x_0, y_0)$ oder $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ (oder in [SH] $f_1'(x_0, y_0)$).

Fixieren wir $x = x_0$, entsteht eine Funktion nur in der Variablen y, nämlich

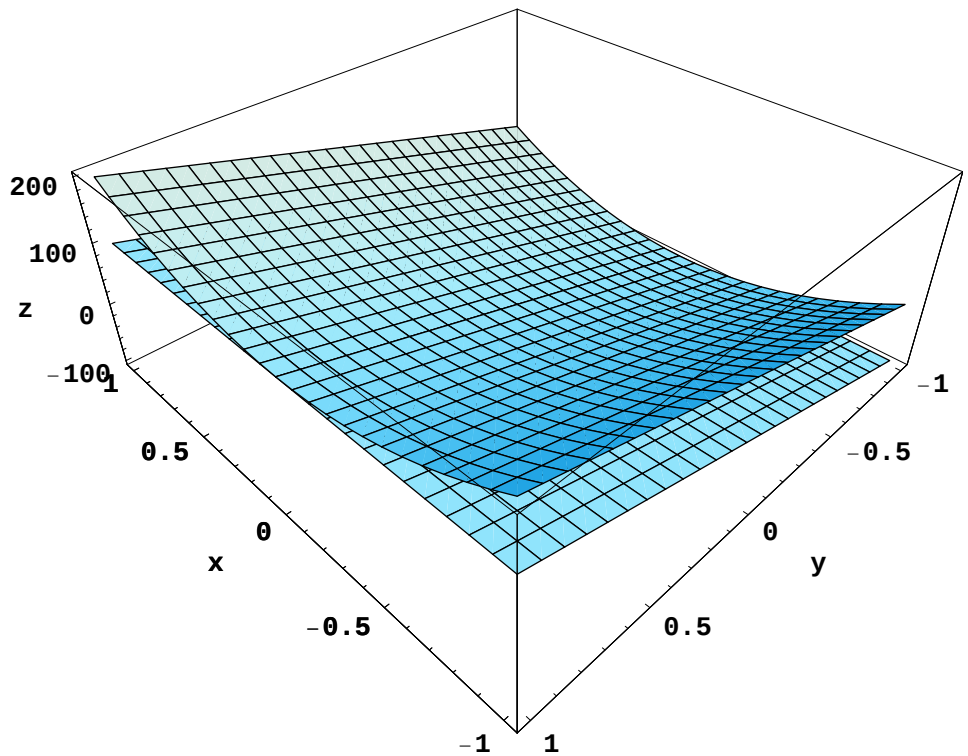
$$\psi(y) := f(x_0, y) = 100x_0^2 + 100y,$$

ihre Ableitung an der Stelle $y = y_0$ ist $\psi'(y_0) = 100$ und heisst *partielle Ableitung von f nach y an der Stelle (x_0, y_0)*;

neues Symbol: $f_y(x_0, y_0)$ oder $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ (oder in [SH] $f_2'(x_0, y_0)$).

Wir illustrieren das Einführungsbeispiel für

$y_0 = 1$ (Vertikalschnitt durch gph f senkrecht zur y-Achse),
$x_0 = 0$ (Vertikalschnitt durch gph f senkrecht zur x-Achse).



$$f(x,y) = 100x^2 + 100y$$

$$f(x,1) = 100x^2 + 100$$
$$f_x(x,1) = 200x$$

$$f(0,y) = 100y$$
$$f_y(0,y) = 100$$

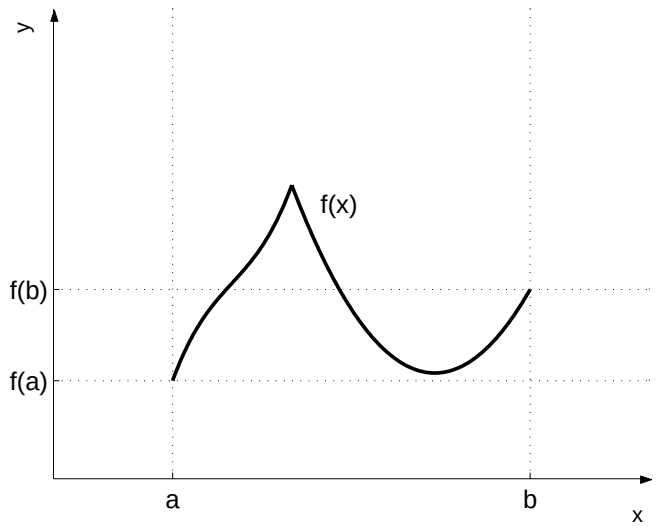
Tangentialebene an gph f im Punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0)$$

Im Beispiel ist $(x_0, y_0) = (0, 1)$, also $z = 100 + 100(y - 1) = 100y$

4.5. Eigenschaften stetiger Funktionen [Ro §5.5], [SH §§7.9, 8.4]

Zwischenwertsatz für stetige Funktionen. Ist $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.



Bemerkungen: (Was der Zwischenwertsatz nicht verbietet)

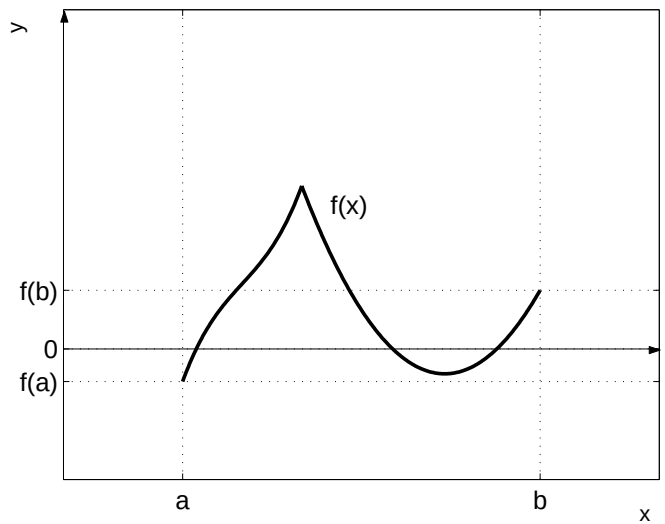
(1) Ein Wert α zwischen $f(a)$ und $f(b)$ kann durch mehr als ein $x \in [a, b]$ angenommen werden.

(2) Für $x \in [a, b]$ kann $f(x)$ ausserhalb des Intervalls $[f(a), f(b)]$ liegen.

Nullstellensatz: (Folgerung aus dem Zwischenwertsatz)
Ist $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und gilt

$$\text{Vorzeichen von } f(a) \neq \text{Vorzeichen von } f(b),$$

so besitzt f in $[a, b]$ mindestens eine Nullstelle.

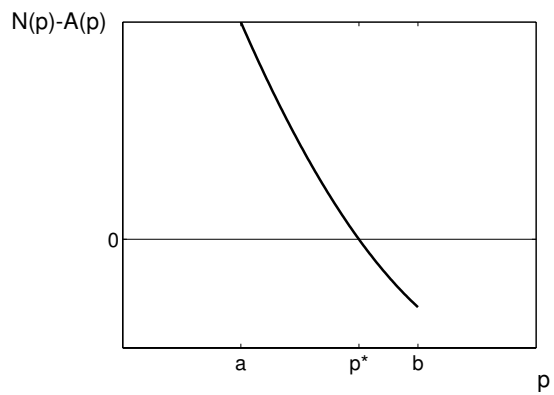


Beweis: Nach Voraussetzung ist 0 ein Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Nach Zwischenwertsatz existiert aber ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = 0$, was zu zeigen war.

Beispiel: Gleichgewichtspreis

$$n(p) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Nachfrage}}}{N(p)} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Angebot}}}{A(p)}, \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Preis}}}{p} > 0.$$

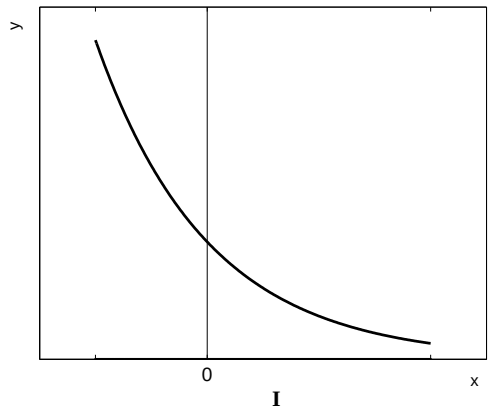
Ein Preis p^* mit $n(p^*) = 0$, d.h., $A(p^*) = N(p^*)$, heisst *Gleichgewichtspreis*.



Numerische Anwendung des Nullstellensatzes:

- Bisektionsverfahren zur Bestimmung einer Nullstelle, vgl. die Bemerkungen zur Intervallschachtelung in [Ro §5.5].
- Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle, vgl. [SH §7.9].

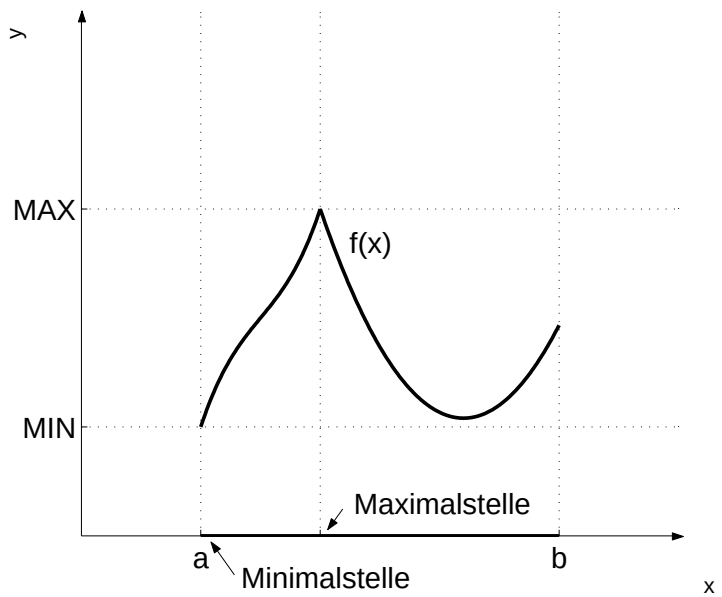
Monotoniesatz: (Folgerung aus dem Zwischenwertsatz)
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ **stetig**. Dann ist f **injektiv genau dann, wenn** f auf I **streng monoton** ist.



Beweisidee: Sogar ohne Stetigkeit gilt: f streng monoton auf $I \Rightarrow f$ injektiv. Zur Umkehrung: Wenn $f : I \to \mathbb{R}$ injektiv ist, aber nicht streng monoton, muss es $x_1 < x_2 < x_3$ $(x_1, x_2, x_3 \in I)$ geben, so dass entweder $f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$ oder $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$ gilt. Im 1. Fall wird dann aber nach Zwischenwertsatz der Wert $f(x_2) + \varepsilon$ (für ein kleines $\varepsilon > 0$) sowohl im Intervall (x_1, x_2) als auch in (x_2, x_3) einmal angenommen - ein Widerspruch zur Injektivität von f. Der 2. Fall geht analog, f muss also streng monoton sein.

Zentraler Satz über die Existenz globaler Extrema:
Extremwertsatz von Weierstrass

Eine **auf einem beschränkten, abgeschlossenen Intervall** $[a, b]$ **stetige Funktion** f nimmt dort sowohl ihr **globales Maximum** als auch ihr **globales Minimum** an.



Literatur: Den (recht schwierigen) Beweis dieses Satzes können Interessierte z.B. bei Kall *Analysis für Ökonomen* finden. Man schaue sich aber auf jeden Fall die hübsche anschauliche Deutung der Aussage im Buch Sydsaeter/Hammond (Abschnitt 8.4) an; natürlich ist das kein mathematischer Beweis.

Bemerkungen zum Extremwertsatz von Weierstrass

1. Vorsicht: Auf einem beschränkten und **offenen** Intervall (a, b) müssen Max und Min einer stetigen und beschränkten Funktion nicht angenommen werden, vgl. die simple Funktion $x \in (a, b) \mapsto x$.

2. Allerdings: Auch auf einem beschränkten und **offenen** Intervall können Max und Min einer stetigen Funktion angenommen werden, vgl. z.B. $f(x) = \sin x$, $x \in I := (-2\pi, 2\pi)$, d.h.,

$$\max_{x \in I} f(x) = 1, \qquad \min_{x \in I} f(x) = -1,$$
$$\operatorname*{argmax}_{x \in I} f(x) = \left\{-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}, \quad \operatorname*{argmin}_{x \in I} f(x) = \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}.$$

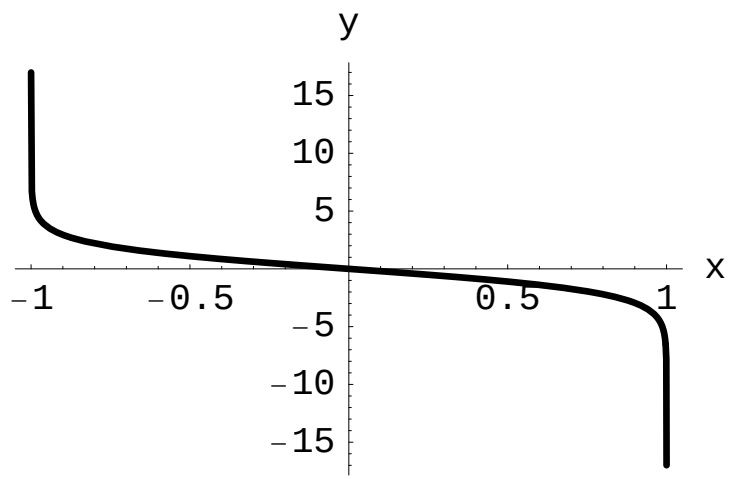
Man kann dieses Beispiel auch auf ein **unbeschränktes Intervall**, etwa auf die ganze reelle Achse, ausdehnen:

$$\operatorname*{argmax}_{x \in \mathbb{R}} \sin x = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\},$$
$$\operatorname*{argmin}_{x \in \mathbb{R}} \sin x = \left\{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

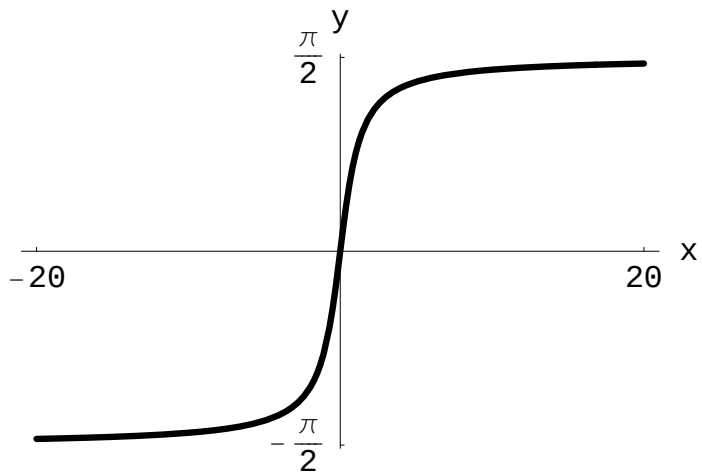
3. **Aber:** Auf einem beschränkten und **offenen** Intervall (a, b) muss eine stetige Funktion nicht einmal ein endliches Infimum oder Supremum haben, man betrachte das Beispiel

$$f(x) = \ln \frac{|x-1|}{|x+1|}, \; x \in (-1, 1).$$

Für dieses f sind $a = -1$ und $b = 1$ einseitige Polstellen.



4. **Ferner:** Auf einem **unbeschränkten** Intervall kann das (endliche) Infimum oder Supremum einer stetigen Funktion existieren, aber die globalen Extrema werden nicht angenommen.

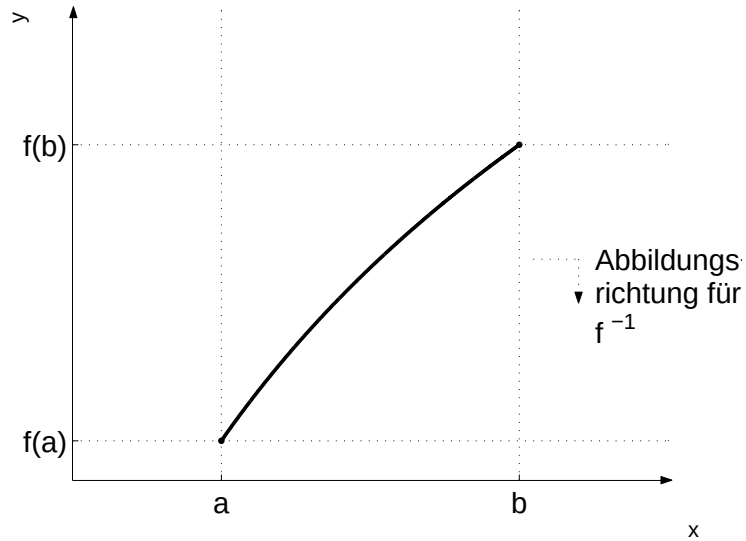


Aufgezeichnet ist hier der Graph der Umkehrfunktion von $\tan x$, wenn man den Definitionsbereich von $\tan x$ auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ einschränkt. Diese Funktion heisst $\arctan x$ *(Arcustangens von x)* und bildet $\mathbb{R}$ auf das Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ab.

Stetigkeit der Umkehrfunktion (nicht in [Ro] und [SH])

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und injektiv (und somit streng monoton), so ist auch f^{-1} stetig und injektiv auf W_f. Dabei gilt:

f streng monoton steigend $\Rightarrow$ f^{-1} streng monoton steigend.
f streng monoton fallend $\Rightarrow$ f^{-1} streng monoton fallend.



Bemerkungen: Der Zwischenwertsatz (wegen der Stetigkeit) liefert

$$W_f = \begin{array}{ll} [f(a), f(b)], & \text{falls } f \text{ streng monoton steigend,} \\ [f(b), f(a)], & \text{falls } f \text{ streng monoton fallend.} \end{array}$$

Ferner wissen wir: f streng monoton $\Rightarrow$ f injektiv $\Rightarrow$ f ist bijektiv als Funktion von $[a, b]$ auf W_f $\Rightarrow$ f^{-1} existiert. Auf den Beweis der Stetigkeit von f^{-1} kann nicht eingegangen werden.

Anwendungsbeispiel zur Stetigkeit:

Man betrachte einen Markt mit 2 Anbietern (und vielen Nachfragern) von je einem Gut:

Anbieter 1: Gut 1 zum Preis p_1
Anbieter 2: Gut 2 zum Preis p_2

Die Güter 1 und 2 seien relativ enge, aber nicht vollständige Substitute.

Nachfragefunktion für Gut 1

$$x_1 = a - bp_1 + cp_2 \qquad (a, b, c > 0)$$

Aktuelle Preise $\quad p_1^0, p_2^0$

Erwartete Reaktion des Anbieters 2 bei Preisänderung für p_1

$p_1 \geq p_1^0$: Anbieter 2 reagiert nicht

$p_1 < p_1^0$: Anbieter 2 reagiert derart, dass $\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_2^0}{p_1^0}$

So ergibt die folgende geknickte Preis-Absatz-Funktion einen Sinn:

$$x_1 = \begin{cases} a - b\,p_1 + c\,p_2^0, & \text{falls } p_1 \geq p_1^0 \\ a - b\,p_1 + c\,\frac{p_2^0}{p_1^0}\,p_1, & \text{falls } p_1 < p_1^0 \end{cases}$$

Wir schreiben kürzer $p := p_1$, $d := cp_2^0$, $p^0 := p_1^0$, d.h., wir betrachten die Funktion

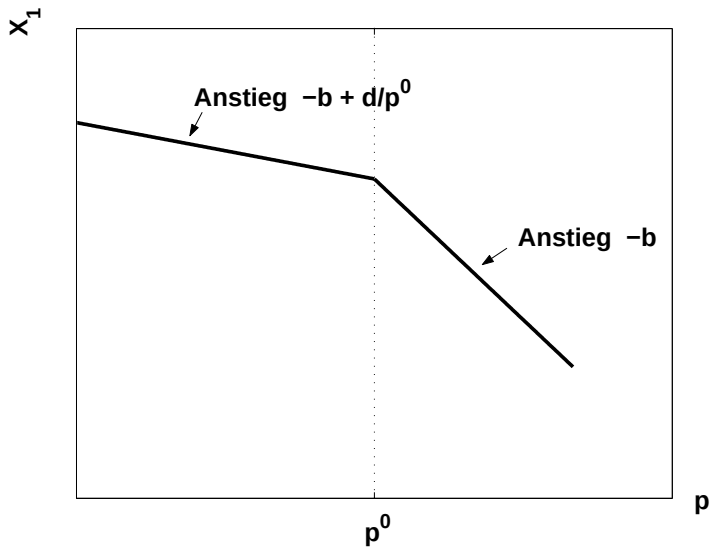
$$f(p) = \begin{cases} a - b\,p + d, & \text{falls } p \geq p^0 \\ a - b\,p + \frac{d}{p^0}\,p, & \text{falls } p < p^0 \end{cases}$$

Für die mathematische Analyse lassen wir $p \in \mathbb{R}$ zu und tragen p auf der Abzisse ab.

f ist offenbar stetig auf $\mathbb{R}$:

Auf jedem Teilstück sind es lineare Funktionen, und es gilt

$$f(p^0) = a - b\,p^0 + d, \quad \lim_{p \to (p^0)^-} f(p) = \lim_{p \to (p^0)^+} f(p) = f(p^0)$$



5. Differentialrechnung der Funktionen in einer Variablen

5.1. Fortsetzung: Ableitungen [Ro §6.1], [SH §§6.1-6.2, 6.9, 7.3]

Seien in §5.1 f eine Funktion von $D \subseteq \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, die Menge D ein Intervall und x_0 ein innerer Punkt von D. Zunächst repetieren wir:

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heisst *differenzierbar an der Stelle* x_0, falls der Grenzwert

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. $f'(x_0)$ heisst *(erste) Ableitung* bzw. *Differentialquotient* von f an der Stelle x_0.

Es gilt also $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ in folgendem Sinne:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \qquad \text{("Linearisierungsformel")}$$

mit $\frac{o(x-x_0)}{x-x_0} \to 0$ für $x \to x_0$. Die durch

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

definierte Gerade heisst *Tangente an* $\operatorname{gph} f$ *im Punkt* $(x_0, f(x_0))$.

Die erste Ableitung $f'(x_0)$ definiert also eine lineare Näherung der Differenz der Funktionswerte:

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0),$$

d.h., mit den Bezeichnungen $\Delta x := x - x_0$ und $\Delta f(x_0) := f(x) - f(x_0)$,

$$\Delta f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x.$$

Definition *Differential* Die lineare Näherung $f'(x_0) \cdot \Delta x$ der Funktionswertänderung $\Delta f(x_0)$ heisst *Differential der Funktion f in x_0* und erhält das Symbol

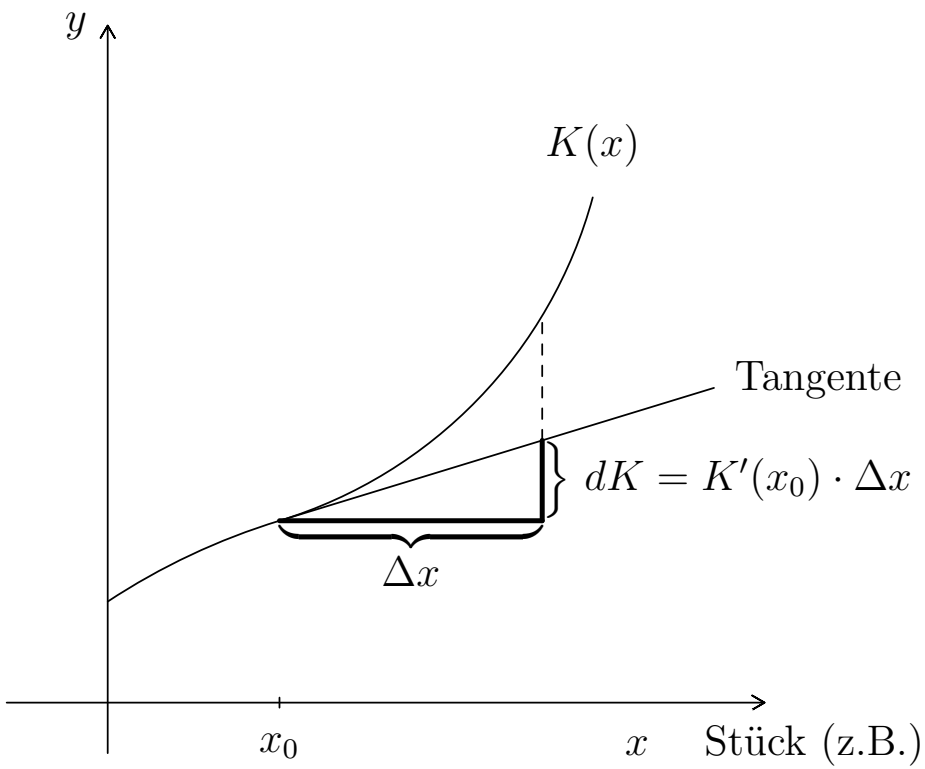
$$df_{x=x_0} = f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Als Kurzschreibweise wird vereinbart (vor allem in Anwendungen):

$$df = f'(x_0) \cdot dx$$

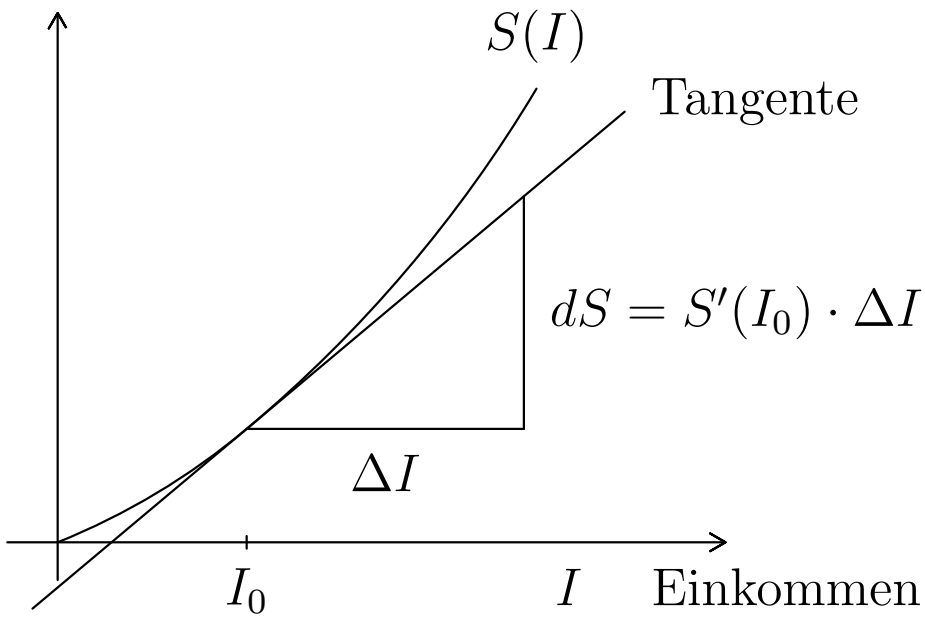
Die Symbole Δx und dx werden synonym verwendet, zwischen $\Delta f(x_0)$ und $df_{x=x_0}$ muss man aber wohl unterscheiden!

Beispiel 1: Betrachten Kostenfunktion $K(x)$, $x \geq 0$.



Dabei ist $dK = dK_{x=x_0}$ das Differential, d.h. eine lineare Approximation der Kostendifferenz $K(x_0 + \Delta x) - K(x_0)$. $K'(x_0)$ nennt man auch die *Grenzkosten* in x_0.

Beispiel 2: Einkommenssteuer $S(I)$, $I \geq 0$ Einkommmen.



Bezeichnet $S'(I_0)$ den *marginalen Steuersatz* zum Einkommen I_0, so bedeutet das

$$S'(I_0) = \lim_{I \to I_0} \frac{S(I) - S(I_0)}{I - I_0} = \lim_{\Delta I \to 0} \frac{S(I_0 + \Delta I) - S(I_0)}{\Delta I}.$$

Definition

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

heisst *linksseitiger Differentialquotient* von f in x_0,

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

heisst *rechtsseitiger Differentialquotient* von f in x_0.

Satz f ist differenzierbar in x_0 genau dann, wenn $f'_-(x_0)$ und $f'_+(x_0)$ existieren und miteinander übereinstimmen. Es gilt dann:

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0).$$

Bemerkung: Beim Beispiel A2 "Funktion mit Knick" in §4.4 galt: $f'_+(\frac{1}{2}), f'_-(\frac{1}{2})$ existieren, aber $f'_+(\frac{1}{2}) \neq f'_-(\frac{1}{2})$.

Satz Wenn f differenzierbar in x_0 ist, so ist f stetig in x_0.

Beweis: Für $x \neq x_0$ gilt

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0).$$

Nach den Rechenregeln für Grenzwerte folgt

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 = f(x_0),$$

was zu zeigen war.

Folgerung (Kontraposition des Satzes!):

$$f \text{ unstetig in } x_0 \;\Rightarrow\; f \text{ nicht differenzierbar in } x_0.$$

Die Umkehrung des Satzes gilt nicht! Beispiel: $f(x) = |x|$, siehe auch unsere "Funktion mit Knick"!

Definition f heisst (einmal) *stetig differenzierbar* in x_0, wenn $f'(x_0)$ existiert und die Ableitungsfunktion $x \longmapsto f'(x)$ in x_0 stetig ist. Analog definiert man die n-mal stetige Differenzierbarkeit.

Bemerkung: Nach dem Satz über die Stetigkeit differenzierbarer Funktionen gilt: Falls $f^{(n)}(x_0)$ existiert, so sind die Funktionen

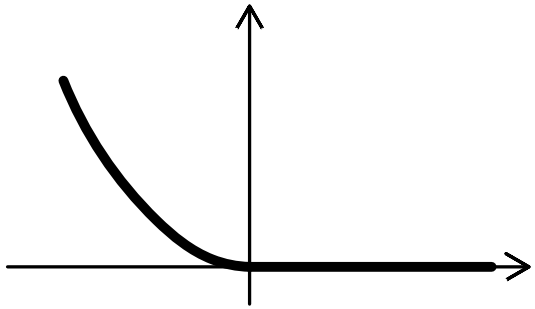
$$\begin{array}{ccc} x & \longmapsto & f'(x) \\ x & \longmapsto & f''(x) \\ & \vdots & \\ x & \longmapsto & f^{(n-1)}(x) \end{array}$$

stetig in x_0; d.h., f ist $(n-1)$-mal stetig differenzierbar in x_0.

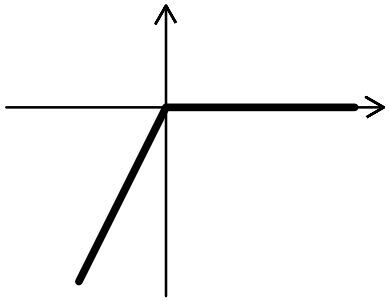
Beispiel:

Einmal *stetig differenzierbare*, aber *nicht* zweimal differenzierbare Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{falls } x \leq 0 \\ 0, & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$



$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{falls } x \leq 0 \\ 0, & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$



5.2. Differentiationsregeln

[Ro §6.2], [SH §§6.6-6.8, 7.2]

Im ganzen Abschnitt 5.2 seien wieder $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, D ein Intervall und x_0 ein innerer Punkt von D.

Satz: Rechnen mit Ableitungen Sind $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : D \to \mathbb{R}$ in einem inneren Punkt x von D differenzierbar, so sind auch die Funktionen $(f+g)$, $(f \cdot g)$, f/g in x differenzierbar, und es gilt:

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x) &= f'(x) + g'(x) \\
(f \cdot g)'(x) &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\
(f/g)'(x) &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2} \quad \text{für } x \text{ mit } g(x) \neq 0.
\end{aligned}$$

Da für die konstante Funktion $f(x) \equiv c$ bekanntlich $f'(x) \equiv 0$ gilt, folgt aus der Produktregel:

$$(c \cdot g(x))' = c \cdot g'(x)$$

Satz: Kettenregel

Sei f in x_0 differenzierbar und g in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar. Dann gilt für die zusammengesetzte Funktion $h(x) := g(f(x))$:

h ist differenzierbar in x_0, wobei

$$h'(x_0) \;=\; g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

MERKREGEL: [äussere Ableitung] · [innere Ableitung]

Die Schreibweise der Kettenregel mit $\frac{d}{dx}$ -, $\frac{d}{dy}$ - Symbolen ist

$$\frac{dh}{dx}(x_0) = \frac{dg}{dy}(f(x_0)) \cdot \frac{df}{dx}(x_0).$$

Kurze Merkregel mit der Symbolik $z = z(y(x))$:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Beispiele

B1 Ableitung der reziproken Funktion zu g

Sei $g(x) \neq 0$. Mit $f(x) \equiv 1$ gilt nach Quotientenregel

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{0 \cdot g(x) - 1 \cdot g'(x)}{[g(x)]^2} = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Alternative:
Anwendung der Kettenregel auf $h(x) = (g(x))^{-1}$ liefert das gleiche Resultat.

B2 Anwendung der Kettenregel

Sei $h(x) = (2x-1)^3$. Offenbar gilt $h(x) = g(f(x))$ mit

$f(x) = 2x - 1,$	d.h. $f'(x) = 2$	innere Ableitung	(INN.)
$g(y) = y^3$	d.h. $g'(y) = 3y^2$	äussere Ableitung	(ÄUSS.)

Folglich

$$\begin{aligned} h'(x) &= 3(2x-1)^2 \cdot 2 \qquad \text{ÄUSS.} \cdot \text{INN.} \\ &= 6(4x^2 - 4x + 1) \\ &= 24x^2 - 24x + 6 \end{aligned}$$

Satz: Ableitung der Umkehrfunktion

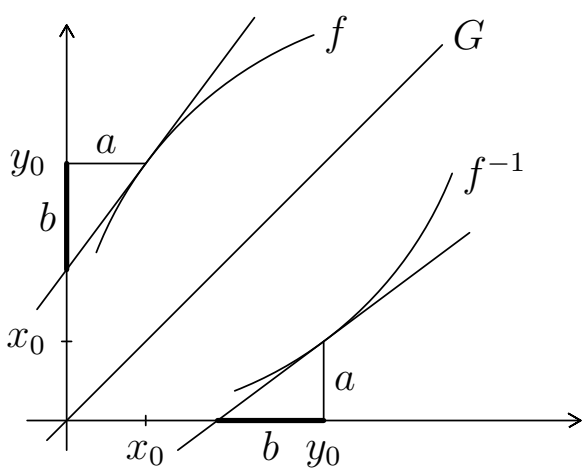
Sei f auf D stetig und injektiv. Ferner sei f an einer Stelle $x_0 \in D$ differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist die Umkehrfunktion f^{-1} an der Stelle $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar, und es gilt

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)},$$

d.h., in der Leibnizschen Schreibweise

$$\frac{df^{-1}}{dy}(y_0) = \frac{1}{\frac{df}{dx}(x_0)}.$$

Geometrische Veranschaulichung:

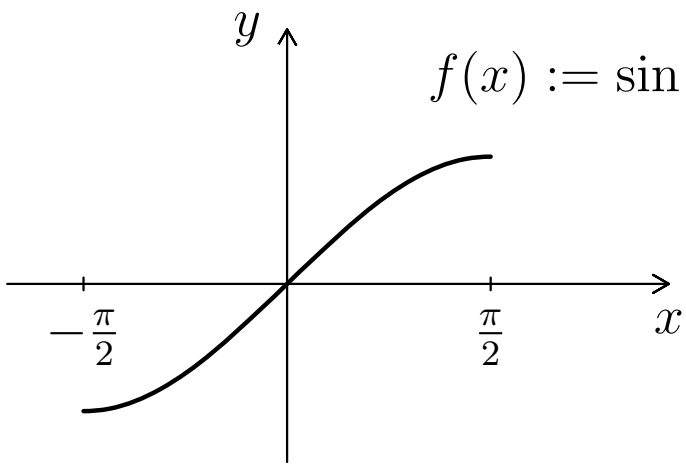


Umkehrung entspricht Spiegelung an der Geraden $G = \{(x, y) \,|\, y = x\}$:

$$f'(x_0) = \frac{b}{a}$$

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{a}{b}$$

Beispiel: Anwendung zur Ableitung der Umkehrfunktion



$f(x) := \sin x, \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

f ist stetig und injektiv auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, und es gilt dort

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = 0 \;\; (\text{i.e., } x = -\tfrac{\pi}{2} \text{ oder } x = \tfrac{\pi}{2})\,.$$

Folglich ist

$$f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Definition der Umkehrfunktion von $\sin x$

Die *Umkehrfunktion* f^{-1} ist folglich definiert als Funktion von $[-1,1]$ auf $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, man nennt sie *Arcussinus*, in Zeichen $\arcsin y$, d.h.,

$$x = \arcsin y \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \sin x$$
$$x \in [-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}]$$
$$y \in [-1,1]$$

Nach dem Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion gilt also für $x \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ (dort gilt $\cos x > 0$), dass

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}.$$

Es folgt, wieder unter Beachtung von $y = \sin x$:

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad y \in (-1,1).$$

5.3. Ableitungen von Standardfunktionen

[Ro §§6.2-6.3], [SH §§6.6-6.11]

Beispiel: $f(x) = x^4$, $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, also $f'(x) = 4x^3$.
Dann hat f die Umkehrfunktion

$$f^{-1}(y) = y = y^{\frac{1}{4}}, \quad y \geq 0,$$

und es gilt an jeder Stelle $y_0 = f(x_0) > 0$ wegen $x_0 = y_0^{\frac{1}{4}}$

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{4x_0^3} = \frac{1}{4} y_0^{-\frac{3}{4}}$$

Allgemein gilt für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x > 0$: $\boxed{(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}}$

Satz: Es gilt $\boxed{(e^x)' = e^x}$ $(x \in \mathbb{R})$.

Beweis: Wir überlassen dem Leser zu beweisen, dass

$$e = \lim_{\beta \to 0} (1+\beta)^{\frac{1}{\beta}} \qquad (!)$$

gilt (Hinweis: Substitution in der Definition von e). Man hat

$$(e^x)' = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

nach Definition der Ableitung und Ausklammern. Mit $h := \ln(1+\beta)$ gilt

$$\frac{e^h - 1}{h} = \frac{\beta}{\ln(1+\beta)} = \frac{1}{\frac{1}{\beta}\ln(1+\beta)} = \frac{1}{\ln(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}}$$

Da die Funktion $x \mapsto \ln x$ stetig ist, folgt nach (!)

$$\lim_{\beta \to 0} \ln(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}} = \ln e = 1.$$

Aus $h \to 0 \Leftrightarrow \beta \to 0$ folgt $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$ und so $(e^x)' = e^x$, <u>q.e.d.</u>

Ableitung beliebiger Exponential- und Logarithmusfunktionen

Für $a > 0$, $a \neq 1$ gilt $\boxed{(a^x)' = a^x \cdot \ln a}$ $(x \in \mathbb{R})$.

Beweis: $(a^x) = (e^{\ln a})^x = e^{x \cdot \ln a}$ und Anwendung der Kettenregel ergibt

$$(a^x)' = e^{x \cdot \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a.$$

Für $0 < a \neq 1$: $\boxed{({}^a\log y)' = \dfrac{1}{y \cdot \ln a}}$, speziell $\boxed{(\ln y)' = \dfrac{1}{y}}$ $(y > 0)$.

Beweis: Nach der Ableitungsregel für die Umkehrfunktion zu $y = a^x$ ist für $y > 0$

$$({}^a\log y)' = \frac{1}{(a^x)'} = \frac{1}{a^x \cdot \ln a} = \frac{1}{y \cdot \ln a}.$$

Ableitungen der trigonometrischen Funktionen

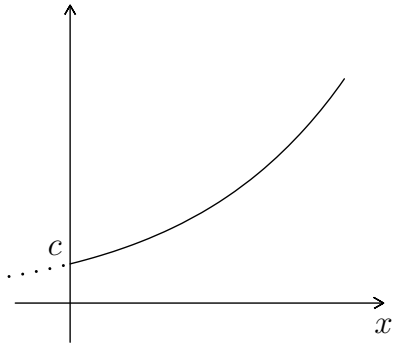
$$
\begin{array}{lcll}
(\sin x)' & = & \cos x & x \in \mathbb{R} \\
(\cos x)' & = & -\sin x & x \in \mathbb{R} \\
(\tan x)' & = & \dfrac{1}{\cos^2 x} & \begin{cases} x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\
(\cot x)' & = & -\dfrac{1}{\sin^2 x} & \begin{cases} x \neq k\pi \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}
\end{array}
$$

Man muss ein paar Formeln weniger kennen, wenn man beachtet:

$$
\begin{aligned}
a^x &= (e^{\ln a})^x \\
\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\
\cot x &= \frac{\cos x}{\sin x}
\end{aligned}
$$

Beispiel: Wachstumsprozesse

Man betrachte $f(x) = c \cdot e^{kx}$,
wobei $c, k > 0$.

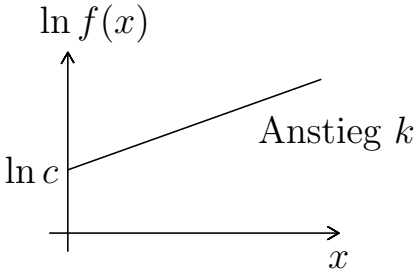


Es gilt $f'(x) = c \cdot k \cdot e^{kx}$, d.h., für die *relative Änderung* gilt

$$\frac{df_{x=x_0}}{f(x_0)} = \frac{f'(x_0)dx}{f(x_0)} = kdx,$$

d.h., die relative Änderung ist unabhängig von x_0. Die Exponentialfunktion wendet man z.B. bei der Darstellung von Wachstumsprozessen an.

Logarithmische Skala
$\ln f(x) = \ln c + k \cdot x$



Logarithmisches Differenzieren [SH §6.11]

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ differenzierbar auf D. Nach Kettenregel gilt

für $h(x) := \ln f(x)$, dass $h'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$, d.h. $f'(x) = h'(x) f(x)$.

Beispiele:

1. Für $f(x) = x^x$, $x > 0$, ergibt sich (Produktregel)

$$(\ln f(x))' = (x \ln x)' = \ln x + \frac{x}{x} = \ln x + 1,$$

also $f'(x) = (1 + \ln x)\, x^x$.

<u>Alternativ:</u> Berechne Ableitung von $f(x) = x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \ln x}$ mit Hilfe der Kettenregel, das liefert das gleiche Resultat.

2. Für $g(x) = [A(x)]^\alpha [B(x)]^\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, mit $A, B : D \subseteq \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ gilt, wenn A und B differenzierbar sind:

$$(\ln g(x))' = (\alpha \ln A(x) + \beta \ln B(x))' = \alpha \frac{A'(x)}{A(x)} + \beta \frac{B'(x)}{B(x)},$$

also

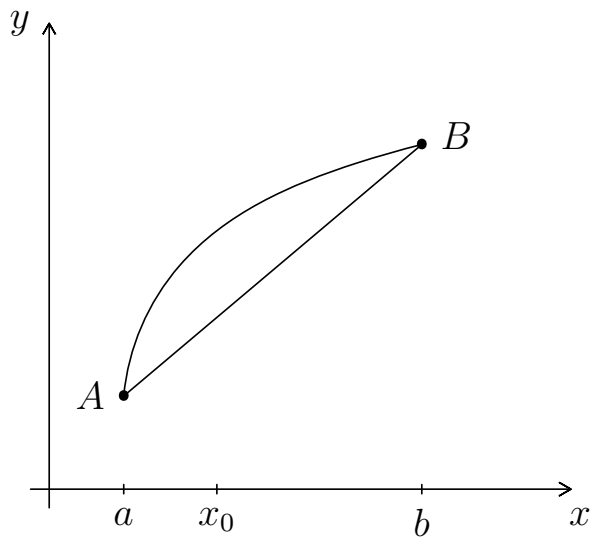
$$g'(x) = \left[\alpha \frac{A'(x)}{A(x)} + \beta \frac{B'(x)}{B(x)}\right] [A(x)]^\alpha [B(x)]^\beta .$$

5.4 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

[Ro §§6.4-6.6], [SH §§6-8]

5.4.1 Mittelwertsatz der Differentialrechnung [Ro §6.4], [SH §8.4]

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann gibt es mindestens ein $x_0 \in (a, b)$, so dass $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.



Betrachte $A = (a, f(a))$, $B = (b, f(b))$

Zur Sekante AB gibt es ein $x_0 \in (a, b)$, so dass die Tangente

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

zu AB parallel ist (d.h., die Sekante und die Tangente haben gleiche Anstiege!)

Äquivalente Formulierung des Mittelwertsatzes

Sei f differenzierbar auf einem Intervall I und $x, \overline{x} \in I$. Dann gilt:

$$\exists \theta \in (0,1): \quad f(x) = f(\overline{x}) + f'(\overline{x} + \theta(x - \overline{x})) \cdot (x - \overline{x}).$$

Offenbar gilt $x_0 := \overline{x} + \theta(x - \overline{x}) = \theta x + (1-\theta)\overline{x} \in (\overline{x}, x)$, falls $0 < \theta < 1$.

Anwendung: Oft werden in der Ökonomie Grenzkosten interpretiert als Kosten "für eine zusätzlich produzierte Einheit", d.h.

$$K(\overline{x} + 1) - K(\overline{x}) \;\approx\; K'(\overline{x}).$$

Der Mittelwertsatz präzisiert die Aussage, indem er sagt

$$K(\overline{x} + 1) - K(\overline{x}) = K'(\overline{x} + \theta) \cdot 1 \quad \text{für ein } \theta \in (0,1).$$

<u>also:</u> falls sich die Ableitung $K'(x)$ für $x \in (\overline{x}, \overline{x} + 1)$ wenig gegenüber $K'(\overline{x})$ ändert, ist die obige Interpretation zulässig.

Folgerungen aus dem Mittelwertsatz

[Ro Sätze 6.8, 6.9]

1. Ist f auf (a,b) differenzierbar und ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$, so ist f konstant auf (a,b).

   Beweis. Sei $\bar{x}, \tilde{x} \in (a,b)$ beliebig. Nach dem Mittelwertsatz und der Voraussetzung gilt

   $$\exists\ \theta\ \in (0,1) : f(\widetilde{x}) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x} + \theta(\widetilde{x} - \bar{x})) \cdot (\widetilde{x} - \bar{x}) = f(\bar{x}).$$

2. Sind f und g differenzierbar und ist $f'(x) = g'(x)$ für alle $x \in (a,b)$, so gilt

   $$\exists c \in \mathbb{R} : \quad f(x) = g(x) + c,$$

   d.h., f und g unterscheiden sich nur bis auf eine Konstante c.

   Beweis. Wende (1) auf die Differenzfunktion $f - g$ an!

Aussage 2 wird in der Integralrechnung von Bedeutung werden.

5.4.2 Monotonie

[Ro §6.4], [SH §6.3]

Kriterium für die Monotonie: Sei f auf $[a,b]$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann gilt:

$$f \text{ monoton steigend in } [a,b] \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b).$$

$$f \text{ monoton fallend in } [a,b] \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a,b).$$

Ferner gilt

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b) \qquad \Rightarrow \qquad f \text{ streng monoton steigend in } [a,b].$$

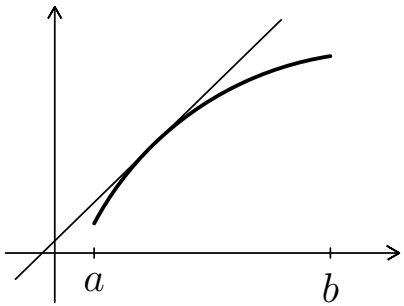
$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a,b) \qquad \Rightarrow \qquad f \text{ streng monoton fallend in } [a,b].$$

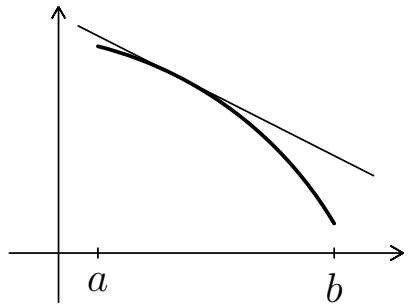
Die Umkehrungen der beiden letzten Implikationen gelten nicht, vgl. z.B.

$$f(x) = x^3 \text{ bzw } f(x) = -x^3,$$

beide sind streng monoton auf $\mathbb{R}$, erfüllen aber $f'(0) = 0$.

Veranschaulichung





Anstieg $f'(x)$ positiv
$\Rightarrow f$ streng monoton $\uparrow$

Anstieg $f'(x)$ negativ
$\Rightarrow f$ streng monoton $\downarrow$

Idee des Beweises (für "(streng) monoton steigend"):

Ist f monoton steigend und gilt $f'(x) < 0$ für ein $x \in (a, b)$, folgt

$$0 > f'(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0 \quad \text{wegen } (f(x+h) - f(x))/h \geq 0 \text{ für } h > 0,$$

ein Widerspruch, also: f monoton steigend $\Rightarrow f' \geq 0$ auf (a, b).

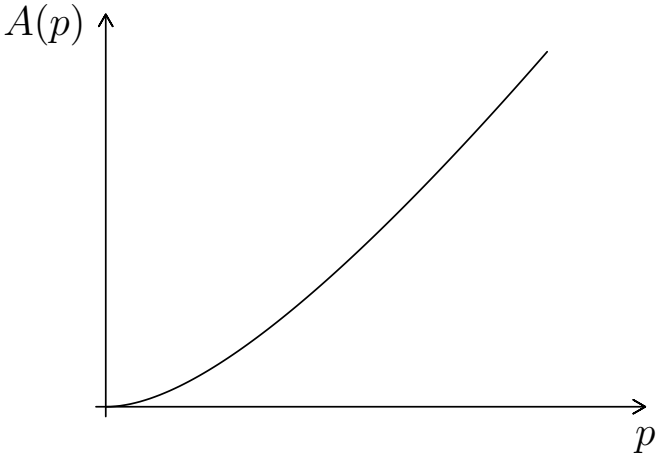
Seien umgekehrt $y, z \in [a, b]$ mit $y < z$ beliebig. Nach Mittelwertsatz gilt

$$f(z) = f(y) + f'(x_0)(z - y) \qquad \text{für ein } x_0 \in (y, z) \subseteq (a, b). \qquad (*)$$

Ist $f'(x) \geq 0$ (bzw. $f'(x) > 0$) für alle $x \in (a, b)$ (also $f'(x_0) \geq 0$ bzw. > 0) folgt wegen $z - y > 0$ aus (*), dass

$$f(z) \geq f(y) \quad (\text{bzw. } f(z) > f(y)).$$

Beispiel: Angebotsfunktion



Sei

$$A(p) = 2 + p - 2\sqrt{p+1}, \;\; p \geq 0.$$

Dann gilt für $p > 0$

$$A'(p) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{p+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{p+1}} > 0,$$

da $\dfrac{1}{\sqrt{p+1}} < 1$. Also ist

$$A \text{ ist streng monoton steigend in } [0, +\infty).$$

5.4.2 Relative Extrema

[Ro §6.4], [SH §8.6]

Relative Extrema Wir kennen die Definitionen bereits aus §4: $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat an der Stelle $x_0 \in D$ ein *lokales Maximum*, falls ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in D \cap U_\delta(x_0),$$

wobei $U_\delta(x_0) := (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ die δ-Umgebung von x_0 ist. Wir sagen, dass im lokalen Maximalpunkt x_0 ein *relatives Maximum* vorliegt, wenn x_0 ein innerer Punkt von D ist. *

Die Begriffe *lokales Minimum* und *relatives Minimum* sind analog definiert. *Extremum* ist der gemeinsame Begriff für Maximum und Minimum. Betrachtet man eine Teilmenge M von D, so spricht man für $v = f(x_0)$ mit $x_0 \in M$ von einem (lokalen, relativen, globalen) *Extremum auf M*, wenn die auf den kleineren Definitionsbereich M eingeschränkte Funktion f in x_0 das betreffende Extremum mit dem Wert v (dem *Extremalwert*) annimmt.

*Im Buch von Sydsaeter und Hammond wird der Begriff *lokales Extremum* wie von uns verwendet, der Begriff *relatives Extremum* wird nicht benutzt, sondern durch die Zusatzvoraussetzung "x_0 innerer Punkt von D" umschrieben.

Notwendiges Optimalitätskriterium 1. Ordnung:
Sei $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in D$. Falls f in x_0 ein relatives Extremum hat, so gilt $f'(x_0) = 0$.

Bemerkung: Dieses Kriterium ist *nicht* hinreichend. Betrachte zum Beispiel $f(x) = x^3$ an der Stelle $x_0 = 0$.

Beweis des Kriteriums. Wenn f in x_0 ein *relatives* Maximum hat, so existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in U_\varepsilon(x_0)$, d.h.,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \begin{cases} \geq 0, & \text{falls } x < x_0 \\ \leq 0, & \text{falls } x > x_0 \end{cases}$$

Da f in x_0 differenzierbar ist, folgt nach Grenzübergang $x \to x_0$

$$0 \leq f'_-(x_0) = f'(x_0) = f'_+(x_0) \leq 0$$

und somit $f'(x_0) = 0$. Für relative Minima ist der Beweis analog.

Definition *stationärer oder kritischer Punkt*

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ein innerer Punkt x_0 von D heisst *stationärer Punkt* oder *kritischer Punkt* von f, falls $f'(x_0) = 0$.

Hinreichendes Optimalitätskriterium 1.Ordnung

Sei f auf $U_\delta(x_0)$ differenzierbar, $\delta > 0$.* Dann gilt:

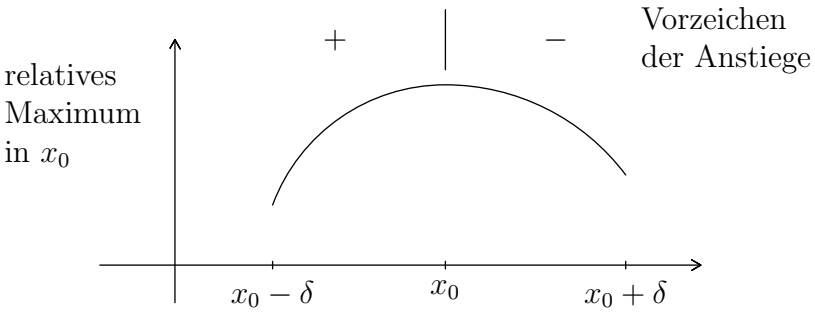
(a) $\left.\begin{array}{l} f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \\ f'(x) \leq 0 \ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \end{array}\right\} \Rightarrow f$ hat in x_0 ein relatives Maximum

(b) $\left.\begin{array}{l} f'(x) \leq 0 \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \\ f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \end{array}\right\} \Rightarrow f$ hat in x_0 ein relatives Minimum

Bemerkung: Gelten bei den Voraussetzungen jeweils die strengen Ungleichungen, liegt sogar ein *striktes Extremum* vor: Ein Punkt $x_0 \in D$ heisst *strikter lokaler Maximalpunkt* von $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wenn $f(x_0) > f(x)$ für alle $x \in D \setminus \{x_0\}$ nahe x_0 gilt. Analog definiert man strikte lokale Minimal- bzw. strikte relative Extremalpunkte.

*Es reicht vorauszusetzen: f auf $U_\delta(x_0)$ stetig und in jedem Punkt $x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ differenzierbar.

Illustration und Beweisidee



Wir betrachten hier (a) mit strikten Vorzeichen. Illustration und Beweis bei nicht-strikten Vorzeichen bzw. im Falle von (b) sind analog.

Seien die Voraussetzungen von (a) mit strikten Vorzeichen erfüllt. Nach dem Mittelwertsatz gilt für alle $x \in U_\delta(x_0)$ die Existenz eines $\theta \in (0,1)$, so dass im Falle $x < x_0$

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0 + \theta(x - x_0))}_{>0} \underbrace{(x - x_0)}_{<0} < f(x_0)$$

gilt, aber auch im Falle $x > x_0$

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0 + \theta(x - x_0))}_{<0} \underbrace{(x - x_0)}_{>0} < f(x_0)$$

erfüllt ist. Folglich $f(x) < f(x_0)$ für $x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$.

Hinreichendes Optimalitätskriterium 2. Ordnung

Sei f auf $U_\delta(x_0)$, $\delta > 0$, zweimal stetig differenzierbar und x_0 ein stationärer Punkt von f, d.h.,

$$f'(x_0) = 0.$$

Dann gilt:

$$f''(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ hat in } x_0 \text{ ein striktes relatives Minimum}.$$

$$f''(x_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ hat in } x_0 \text{ ein striktes relatives Maximum}.$$

Bemerkung. Die Umkehrung des vorigen Satzes gilt nicht! Man betrachte das folgende Beispiel:

$$f(x) = x^4$$

hat an der Stelle $x = 0$ ein striktes relatives Minimum, es gilt

$$f'(0) = 0, \text{ aber auch } f''(0) = 0.$$

Beweis zum hinreichenden Optimalitätskriterium 2. Ordnung:
Sei $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$. Somit

$$\underset{\text{da } f'' \text{ stetig}}{\Rightarrow} \quad \exists\, \varepsilon > 0 \text{ mit } f''(x) > 0 \quad \forall x \in U_\varepsilon(x_0)$$

$$\underset{\text{Monotoniekriterium}}{\Rightarrow} \quad f' \text{ ist auf } U_\varepsilon(x_0) \text{ eine streng monoton steigende Funktion}$$

$$\underset{\text{da } f'(x_0) = 0}{\Rightarrow} \quad \begin{array}{l} f'(x) < 0,\ x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \\ f'(x) > 0,\ x \in (x_0, x_0 + \varepsilon) \end{array}$$

$$\underset{\text{hinreichendes Opt.krit. 1. Ordng.}}{\Rightarrow} \quad f \text{ hat striktes relatives Minimum in } x_0$$

Analog geht der Beweis für strikte relative *Maximal*punkte unter $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$.

Anwendung: Extremwertanalyse

Für eine (eventuell mehrfach) differenzierbare Funktion f über einem offenen Intervall I lassen sich **relative Extrema** mit Hilfe der o.a. Kriterien finden: Man bestimme zunächst alle *stationären Punkte* $x_0 \in I$ mit

$$f'(x_0) = 0$$

– das sind also Punkte, die im Verdacht stehen, Stellen eines relativen Extremums zu sein (mehr nicht!): sie sind "mögliche Extremalstellen", denn sie erfüllen ein *notwendiges Optimalitätskriterium*.

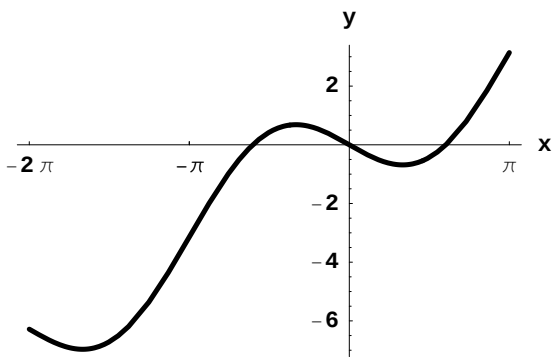
Dann überprüfe man für jeden der ermittelten stationären Punkte, ob er einem *hinreichenden Optimalitätskriterium* genügt, um festzustellen, ob es sich ggf. um ein relatives Minumum oder relatives Maximum handelt.

Auf einem beschränkten abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ ist diese Analyse oft hilfreich, auch alle *globalen* und *lokalen Extremalstellen* zu finden.

Aufgabe. Bestimmen Sie die relativen Extrema der Funktion

$$f(x) = x - 2\sin x,$$

$$x \in (-2\pi, \pi)$$



Stationäre Punkte (auch *kritische Punkte* genannt):

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - 2\cos x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \cos x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Im Intervall $(-2\pi, \pi)$ wird die Gleichung $\cos x = \frac{1}{2}$ erfüllt für

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{\pi}{3} \\ x_2 &= -\frac{\pi}{3} \\ x_3 &= -2\pi + \frac{\pi}{3} \end{aligned}\right\} \textbf{ stationäre Punkte}$$

Hinreichendes Optimalitätskriterium 2. Ordnung überprüfen:

$$f''(x) = 2\sin x,$$

folglich

$$\begin{aligned} f''(x_1) &= 2\sin\tfrac{\pi}{3} > 0 \\ &\Rightarrow f \text{ hat an der Stelle } x_1 \textbf{ ein relatives Minimum} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x_2) &= 2\sin(-\tfrac{\pi}{3}) < 0 \\ &\Rightarrow f \text{ hat an der Stelle } x_2 \textbf{ ein relatives Maximum} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x_3) &= 2\sin(-2\pi + \tfrac{\pi}{3}) \\ &= 2\sin\tfrac{\pi}{3} > 0 \\ &\Rightarrow f \text{ hat an der Stelle } x_3 \textbf{ ein relatives Minimum} \end{aligned}$$

Damit sind alle relativen Extrema ermittelt.

Zusatzaufgabe: Wo nimmt $f(x) = x - 2\sin x$

auf dem abgeschlossenen Intervall $[-2\pi, \pi]$

seine globalen Extrema und eventuell weitere lokale Extrema an?

Lösung der Zusatzaufgabe: Die *globalen Extrema* sind nur unter den relativen Extrema und den Randpunkten zu suchen: Dazu vergleiche die **Werte der relativen Extrema** $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$ mit den **Funktionswerten in den Randpunkten**, also mit $f(-2\pi)$, $f(\pi)$. Als *weitere lokale Extrema* können auch nur Randpunkte auftreten.

Im Beispiel gilt

$$\begin{aligned}
f(x_1) &= \tfrac{\pi}{3} - 2\sin\tfrac{\pi}{3} &&\approx -0.685\\
f(x_2) &= -\tfrac{\pi}{3} - 2\sin(\tfrac{-\pi}{3}) &&\approx 0.685\\
f(x_3) &= -\tfrac{5}{3}\pi - 2\sin\tfrac{\pi}{3} &&\approx -6.968\\
f(-2\pi) &= -2\pi - 2\sin(-2\pi) = -2\pi &&\approx -6.283\\
f(\pi) &= \pi - 2\sin\pi = \pi &&\approx 3.142
\end{aligned}$$

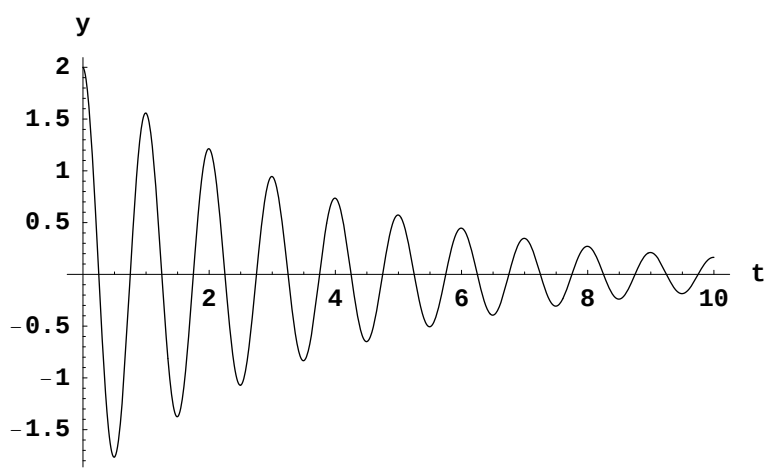
Das **globale Minimum** wird in $x_3 = -\frac{5}{3}\pi$ angenommen und ist auch relatives Minimum. Das **globale Maximum** wird im rechten Randpunkt $b = \pi$ angenommen, $b = \pi$ ist damit auch eine **weitere lokale Maximalstelle**. Für x nahe dem linken Randpunkt $a = -2\pi$ gilt $f'(x) < 0$ wegen $f'(a) = -1$ und der Stetigkeit von f', also ist f in einer Umgebung von a streng monoton fallend. Damit hat f in a bezüglich $[-2\pi, \pi]$ ein **weiteres lokales Maximum**.

Übungsaufgabe:

In der Makroökonomie-Ausbildung werden Sie *dynamische Systeme* analysieren, vgl. etwa §5 in *T. Hens, C. Strub "Grundzüge der analytischen Makroökonomie", Springer 2004* oder Chapt. 15 in *A.C. Chiang "Fundamental Methods of Mathematical Economics, McGrawHill 1984*. Stichwort: dynamisch stabile Gleichgewichte.

Dabei ist z.B. folgende Funktion von Interesse ($A, h > 0$ gegeben)

$$y(t) = A\, e^{-ht} \cos(2\pi t), \;\; t \geq 0.$$



Betrachte $y(t)$ für $A = 2$, $h = 0.25$.

- Man zeige $\lim_{t \to +\infty} y(t) = 0$.
- Ermitteln Sie alle Stellen eines lokalen oder globalen Extremums von y im Intervall $D = [0, 10]$ mit Hilfe der Differentialrechnung.

Bemerkungen:

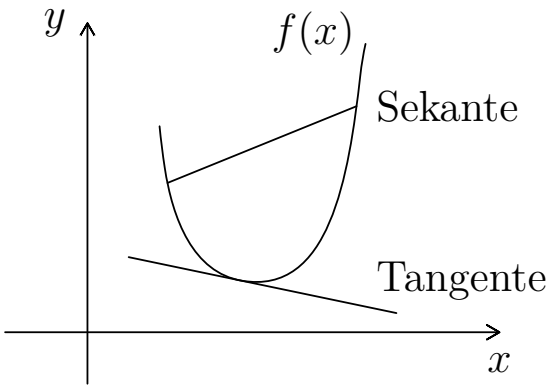
1. Für eine differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, D ein Intervall, ist unser Vorgehen zur Bestimmung **globaler** Extrema nur gültig, wenn $D = [a, b]$. Ist D ein offenes oder halboffenes oder ein unbeschränktes Intervall, so muss kein globales Minimum/Maximum existieren, vgl. §4.

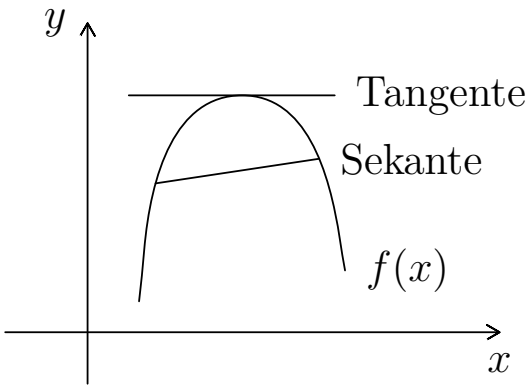
2. Ein weiteres hinreichendes Optimalitätskriterium für relative Extrema folgt weiter unten: Einbeziehung höherer Ableitungen.

3. Für die Minimierung konvexer Funktionen bzw. die Maximierung konkaver Funktionen sind stationäre Punkte automatisch globale Extrema, siehe unten.

5.4.3 Konvexität und Konkavität [Ro §6.4], [SH §§6.9, 8.2]

Anschauliche Charakterisierung konvexer und konkaver Funktionen: *nach Definition* über die Lage der Sekanten im Graphen, beim Studium *differenzierbarer Funktionen* auch über die Lage der Tangenten an den Graphen:





konvexe Funktion f:
alle Sekanten oberhalb gph f
alle Tangenten unterhalb gph f

konkave Funktion f:
alle Sekanten unterhalb gph f
alle Tangenten oberhalb gph f

Satz: Konvexitäts- und Konkavitätskriterium. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

Dann sind die folgenden Aussagen paarweise zueinander äquivalent:

1. f ist konvex über D (zur Definition vgl. §4.1).
2. $f(x) \geq f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi)$ für alle $x, \xi \in D$.
3. f' ist monoton steigend auf D.

Ferner sind die folgenden Aussagen paarweise zueinander äquivalent:

a. f ist konkav über D (zur Definition vgl. §4.1).
b. $f(x) \leq f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi)$ für alle $x, \xi \in D$.
c. f' ist monoton fallend auf D.

Vergleicht man die Funktionsgleichung $y = f(x)$ mit der Gleichung der Tangente an $\operatorname{gph} f$ in $(\xi, f(\xi))$, d.h. mit

$$y = f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi),$$

werden die o.a. anschaulichen Charakterisierungen sofort klar!

Ökonomische Interpretation von 1. $\Leftrightarrow$ 3. und $a.$ $\Leftrightarrow$ $c.$ z.B.:

- *konvexe Kostenfunktion* $K \equiv$ *zunehmende Grenzkosten* K'
- *konkave Ertragsfunktion* $E \equiv$ *abnehmender Grenzertrag* E'

Folgerung

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ auf D zweimal differenzierbar. Dann gilt:

$$f \text{ ist konvex über } D \iff f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in D$$

$$f \text{ ist konkav über } D \iff f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in D$$

Beweis. Nach dem Monotoniekriterium ist $f''(x) \geq 0$ $\forall x \in D$ genau dann, wenn f' auf D eine monotone Funktion ist. Nach dem vorigen Satz ist das äquivalent dazu, dass f über D konvex ist. Die Konkavität folgt analog.

Optimalitätskriterium für konvexe und konkave Funktionen

Satz.

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf D und $x_0 \in D$.
Falls f konvex ist, so gilt

$$f'(x_0) = 0 \;\Rightarrow\; f \;\text{ hat in } x_0 \text{ ein globales Minimum bezüglich } D.$$

Falls f konkav ist, so gilt

$$f'(x_0) = 0 \;\Rightarrow\; f \;\text{ hat in } x_0 \text{ ein globales Maximum bezüglich } D.$$

In beiden Fällen gilt bekanntlich die Umkehrung, wenn x_0 innerer Punkt von D ist.

Beweis. Sei f konvex und $f'(x_0) = 0$. Nach dem Konvexitätskriterium 1. $\Leftrightarrow$ 2. folgt

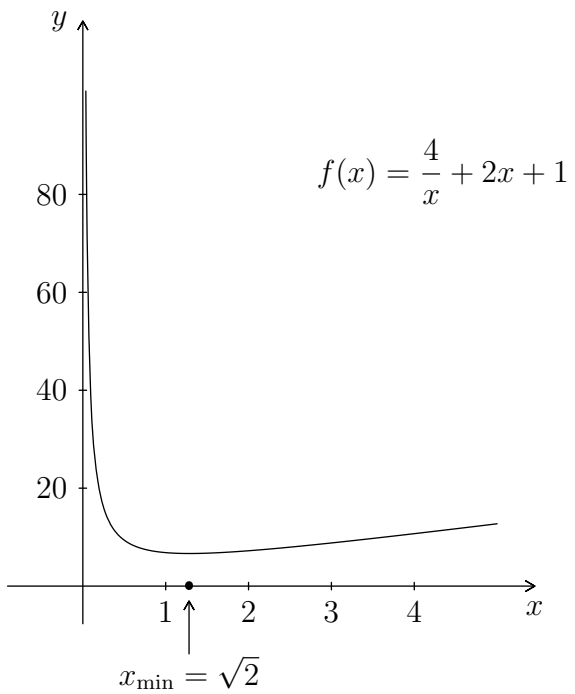
$$\forall x \in D: \quad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(x_0),$$

also ist x_0 globaler Minimalpunkt. Im Falle der Konkavität ist der Beweis analog. Die Umkehrung folgt aus dem notwendigen Optimalitätskriterium 1. Ordnung.

Beispiel: Stückbezogene Lagerkosten werden oft beschrieben durch eine Funktion der Form

$$f(x) = \frac{\alpha}{x} + \beta x + \gamma, \quad x > 0,$$

bei gegebenen Konstanten $\alpha, \beta, \gamma > 0$. Somit $f'(x) = -\frac{\alpha}{x^2} + \beta$.



Aus $f''(x) = \frac{2\alpha}{x^3} > 0$ für alle $x > 0$ folgt die Konvexität von f auf $(0, +\infty)$.

Ferner gilt für $x > 0$ (!)
$f'(x) < 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 < \alpha/\beta \;\Leftrightarrow\; x < \sqrt{\alpha/\beta}$,
$f'(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; x > \sqrt{\alpha/\beta}$,
$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \sqrt{\alpha/\beta}$.

Illustration links: $\alpha = 4$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$.

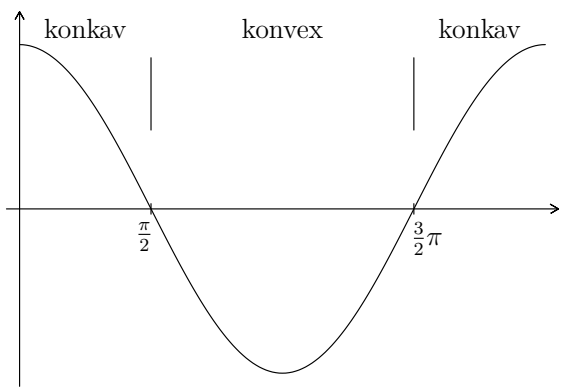
In $\sqrt{\alpha/\beta}$ nimmt f also ihr globales Minimum auf $(0, +\infty)$ an, links/rechts davon fällt/steigt f streng monoton.

Wendepunkte

Wenn $f : D \subseteq \mathbb{R}$ auf D zweimal differenzierbar ist und ihre zweite Ableitung f'' in x_0 das Vorzeichen wechselt, so ändert sich ihr Krümmungsverhalten. f' hat dann in x_0 ein relatives Extremum.

Definition: x_0 heisst *Wendepunkt* von f, wenn f' in x_0 ein relatives Extremum hat.

Daraus folgt: x_0 Wendepunkt $\Rightarrow$ $f''(x_0) = 0$.



$f(x) = \cos x,\ x \in (0, 2\pi)$,
hat Wendepunkte in
$x_1 = \frac{\pi}{2},\ x_2 = \frac{3}{2}\pi$.

5.4.4. Asymptoten

[Ro §§5.3, 5.6], [SH §7.8]

Sei f eine auf einem Intervall $D \subseteq \mathbb{R}$ definierte reellwertige Funktion.

Ist $D = (a, b)$ oder $D = (a, +\infty)$ und gilt $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ oder $= +\infty$, dann heisst die Gerade

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = a\}$$

vertikale Asymptote an gph f *in* $x = a$, a ist also eine *Polstelle* von f. Analog ist eine vertikale Asymptote definiert, wenn $D = (a, b)$ oder $D = (-\infty, b)$ ist und $\lim_{x \to b^-} f(x) = -\infty$ oder $= +\infty$ gilt.

Ist D ein unbeschränktes Intervall, so heisst eine durch $g(x) = mx + c$ definierte Gerade G *Asymptote* zum Graphen von f, wenn

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \to -\infty} (f(x) - g(x)) = 0$$

gilt. Im Falle $m = 0$ heisst die Asymptote *horizontal*.

In der Übungsaufgabe am Ende von §5.4.2 war

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = 0$$

zu zeigen, also ist in diesem Falle die t-Achse horizontale Asymptote an den Graphen der dort betrachteten Funktion y.

Wenn f auf einem unbeschränkten Intervall D differenzierbar ist und

$$G = \{(x, y) \,|\, y = g(x) := mx + c\}$$

Asymptote an den Graphen von f ist, gilt notwendigerweise

$$\lim_{x \to +\infty} (f'(x) - g'(x)) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \to -\infty} (f'(x) - g'(x)) = 0,$$

also

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = m \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \to -\infty} f'(x) = m.$$

Übungsaufgabe:

Man zeige für die o.a. Funktion der stückbezogenen Lagerkosten

$$f(x) = \frac{\alpha}{x} + \beta x + \gamma, \;\; x > 0,$$

dass $g(x) = \beta x + \gamma$ eine Asymptote zu gph f ist (vgl. dort die Zeichnung!).

Lösung: Im Beispiel gilt $D = (0, +\infty)$. Man rechnet nach:

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \lim_{x \to +\infty} (-\tfrac{\alpha}{x^2} + \beta) = \beta \quad \Rightarrow \quad m = \beta$$

Somit setzen wir $m = \beta$ an und erhalten

$$\begin{aligned} & \lim_{x \to +\infty} (\tfrac{\alpha}{x} + \beta x + \gamma - (\beta x + c)) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \lim_{x \to +\infty} (\tfrac{\alpha}{x} + \gamma - c) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & c = \gamma \end{aligned}$$

Also definiert $g(x) = \beta x + \gamma$ in der Tat eine Asymptote zum Graphen von f.

5.4.5. Ökonomische Anwendungen [SH §§7.1, 7.5, 8.2-8.6], [Ro §6.5]

Implizites Differenzieren [SH §7.1]

In der Mikroökonomie-Ausbildung haben Sie etwa bei der Behandlung der *Grenzrate der Substitution* die

Ableitungen von implizit definierten Funktionen

betrachtet. Systematisch behandeln wir dieses Problem in Kapitel 6. Wir erläutern ein mögliches (aber weniger elegantes) Vorgehen an einem Beispiel*.

Aufgabe: Für die Gleichung $y^3 + 3x^2y = 13$ sei bekannt, dass sie in der Umgebung

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x - x_0| < 1,\ |y - y_0| < 1\}$$

des Punktes $(x_0, y_0) = (2, 1)$ implizit eine differenzierbare Funktion definiert (die wir aber nicht ausrechnen wollen), d.h., es existiert eine differenzierbare Funktion $y = y(x)$, so dass

$$\forall (x, y) \in U: \quad y^3 + 3x^2y = 13 \quad \Leftrightarrow \quad y = y(x).$$

Man berechne die Ableitung von $y(x)$ an der Stelle $x_0 = 2$, also $y'(2)$.

*Das ist Beispiel 2 in Abschnitt 7.1 von [SH], vgl. dort auch die Zeichnung!

Lösung: Für $(x,y) \in U$ ist die Gleichung $y^3 + 3x^2y = 13$ äquivalent zu

$$y(x)^3 + 3x^2y(x) = 13,$$

wobei y in $x_0 = 2$ differenzierbar ist.

Links steht nun eine Funktion, die stets konstant gleich 13 ist, also ist ihre Ableitung für alle betrachteten x gleich Null.

Nach Ketten- und Produktregel folgt

$$3y(x)^2y'(x) + 3x^2y'(x) + 6xy(x) = 0. \qquad (!)$$

Es gilt dabei nach Voraussetzung $x_0 = 2$ und $y(x_0) = y_0 = 1$. Da y in x_0 differenzierbar und damit stetig ist, gilt auch $y(x) \neq 0$ für x "nahe" x_0. Also dürfen wir nach $y'(x)$ auflösen, und wir erhalten

$$y'(x) = -\frac{6xy(x)}{3y(x)^2 + 3x^2} = -\frac{2xy(x)}{y(x)^2 + x^2}.$$

Einsetzen von $x = x_0 = 2$ und $y(x_0) = y_0 = 1$ ergibt das gesuchte Ergebnis

$$y'(2) = -\frac{4}{5}.$$

Bemerkungen:

1. Beim praktischen Rechnen in den Anwendungen werden die oben gebrachten Argumente (z.B. $y(x) \neq 0$ für x nahe x_0) meist stillschweigend übergangen.

2. Eine Voraussetzung, die die Existenz der differenzierbaren impliziten Funktion $y = y(x)$ für $(x, y) \in U$ sichert, ist

$$g_y(x_0, y_0) \neq 0 \quad \text{(partielle Ableitung von } g \text{ nach } y\text{)},$$

wobei oben im Beispiel $g(x, y) := y^3 + 3x^2y - 13 = 0$ betrachtet wird. In Kapitel 6 sagt der Satz über implizite Funktionen, dass

$$y'(x_0) = -g_x(x_0, y_0)/g_y(x_0, y_0),$$

was als Eselsbrücke aus der Formel "totales Differential = 0" (vgl. §6) ableitbar ist: $0 = g_x dx + g_y dy$, d.h., $dy/dx = -g_x/g_y$.

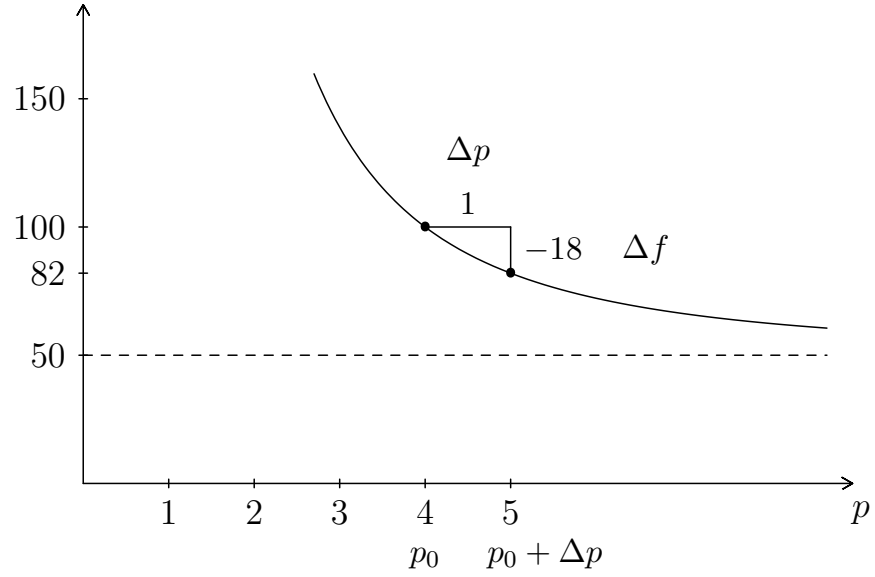
Das ist der elegantere und in der Praxis meist genutzte Zugang! Wir behandeln ihn in §6! In unserem Beispiel gilt $g_x(2, 1) = 12$, $g_y(2, 1) = 15$, also folgt im Handumdrehen $y'(2) = -4/5$.

Elastizität

[Ro §6.5], [SH §7.6]

Als Beispiel betrachten wir eine Nachfragefunktion für ein Gut:

$$f(p) = \frac{800}{p^2} + 50 \quad (p > 0)$$



Setze $p_0 = 4$, $\Delta p = 1$, $f_0 = f(p_0)$, $\Delta f = f(p_0 + \Delta p) - f(p_0)$, also gilt:

$$\frac{\Delta p}{p_0} = \frac{1}{4} = 25\%, \quad \frac{\Delta f}{f_0} = \frac{-18}{100} = -18\%, \quad \frac{\frac{\Delta f}{f_0}}{\frac{\Delta p}{p_0}} = \frac{-18}{25} = -0.72,$$

der letzte Ausdruck entspricht folglich dem

Verhältnis von prozentualer Änderung der Funktionswerte gegenüber derjenigen der Variablen.

Allgemein gilt mit Konvergenz $p \to p_0$

$$\frac{\Delta f}{f_0} \cdot \left(\frac{\Delta p}{p_0}\right)^{-1} = \frac{p_0}{f_0} \cdot \frac{\Delta f}{\Delta p} \quad \longrightarrow_{p \to p_0} \quad \underbrace{\frac{p_0}{f_0} \cdot f'(p_0)}_{\varepsilon_f(p_0)}$$

Definition. Falls f differenzierbar ist, heisst die Funktion

$$\varepsilon_f(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x) \qquad \text{(Bezeichnung in [SH]: } \mathrm{El}_x f(x)\text{)}$$

Elastizität der Funktion f bezüglich x (oder x-*Elastizität von f*). Als *elastischen Bereich* bezeichnet man die Menge aller Punkte x mit $|\varepsilon_f(x)| > 1$, als *unelastischen Bereich* die mit $|\varepsilon_f(x)| < 1$. Falls $x > 0$ ist, gilt offenbar $\varepsilon_f(x) = (\ln f(x))'/(\ln x)'$.

Im Beispiel $x = p$ (Preis), $f = f(x)$ (Nachfrage), spricht man von der *Preiselastizität der Nachfrage*. Dabei gilt:

$$\left.\begin{aligned} f'(p) &= -\frac{1600}{p^3} \\ \frac{p}{f(p)} &= \frac{p^3}{800 + 50p^2} \\ \varepsilon_f(p) &= -\frac{32}{16 + p^2} \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \textit{elastischer Bereich:} \\ 32 > 16 + p^2,\ p > 0 \\ \Longleftrightarrow 0 < p < 4 \\ \\ \textit{unelastischer Bereich:} \\ 4 < p < +\infty \end{array}$$

Gewinnmaximum

[Ro §6.5]

Als Beispiel betrachten wir x als *Produktionsoutput*, $E(x)$, $x \geq 0$, als *Erlösfunktion*, $K(x)$, $x \geq 0$, als *Kostenfunktion* und

$$G(x) = E(x) - K(x) \text{ als } \textit{Gewinnfunktion}$$

Voraussetzungen: E und K sind zweimal stetig differenzierbar auf $(0, +\infty)$, d.h., G ist zweimal stetig differenzierbar auf $(0, +\infty)$.

Notwendig: für ein relatives Gewinnmaximum in $x_0 > 0$ ist

$$G'(x_0) = E'(x_0) - K'(x_0) = 0,$$

d.h., für den Output $x_0 > 0$ muss gelten

Grenzerlös in x_0 = Grenzkosten in x_0

Hinreichend für ein relatives Gewinnmaximum in $x_0 > 0$ sind

$$G'(x_0) = 0 \text{ und } G''(x_0) < 0,$$

folglich $G''(x) < 0$ für x "nahe" x_0, d.h. es gilt

Grenzerlös in x_0 = Grenzkosten in x_0 **und** Grenzgewinn G' ist streng monoton fallend auf einer Umgebung von x_0.

a. Gewinnmaximum eines Monopolisten

Ökonomische Annahmen:

- M. steuert den Absatz x über den Preis $p(x)$
- M. produziert gerade so viel, wie er zum festgelegten Preis absetzen kann, d.h. $G(x) = E(x) - K(x) = p(x) \cdot x - K(x)$

Die Absatzmenge x_c, für die G ein relatives Maximum annimmt, heisst *Cournot-Menge*, $p(x_c)$ *Cournot-Preis*, $(x_c, p(x_c))$ *Cournot-Punkt*.

Bei linearem Ansatz für $p(x)$ gilt:

$$p(x) = \alpha x + \beta \quad (\alpha < 0,\ \beta > 0)$$

und wir haben

$$\begin{aligned} E'(x) &= p(x) + p'(x) \cdot x \\ &= \alpha x + \beta + \alpha x \\ &= 2\alpha x + \beta \end{aligned}$$

Die Cournot-(Absatz-)Menge x_c ergibt sich aus $G'(x_c) = 0$, also aus

$$E'(x_c) = K'(x_c),$$

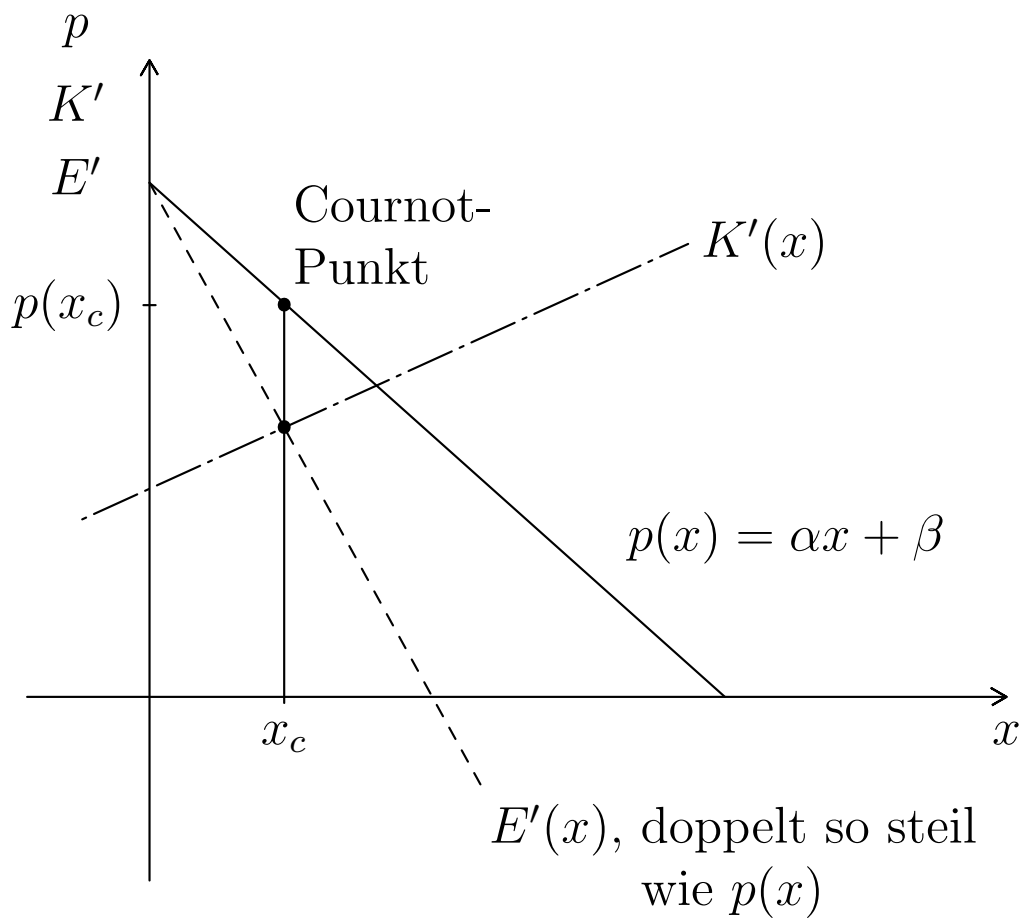
d.h. bei linearem Preisansatz aus

$$2\alpha x_c + \beta = K'(x_c),$$

falls die hinreichende Bedingung $G''(x_c) = 2\alpha - K''(x_c) < 0$ erfüllt ist.

Graphische Lösung für Problem a.

Sei K' linear mit positivem Anstieg



b. Gewinnmaximum bei vollständiger Konkurrenz

Ökonomische Annahme: Der Preis p ist für jeden Anbieter eine vom Markt vorgegebene feste Grösse pro Einheit $E(x) = p \cdot x$

Notwendige Bedingung für relatives Maximum in $x_0 > 0$:

$$E'(x_0) = K'(x_0),$$

das heisst Preis p = Grenzkosten $K'(x_0)$.

Hinreichende Bedingungen für relatives Maximum in $x_0 > 0$:

$$p = K'(x_0) \quad \text{und} \quad E''(x_0) - K''(x_0) < 0$$

also gilt $K''(x_0) > 0$ wegen $E''(x_0) = 0$ und somit sogar $K''(x) > 0$ für x in einer δ-Umgebung $U_\delta(x_0)$.

Ökonomisch bedeutet das: In $x_0 > 0$ liegt ein Gewinnmaximum vor, falls Preis p = Grenzkosten in x_0 gilt **und** die Grenzkosten in einer Umgebung von x_0 streng steigend sind.

5.5 Taylor-Approximation

[Ro §6.6], [SH §§7.3-7.5]

Zur Erinnerung:

Wenn f differenzierbar ist in x_0, so gilt die Linearisierungsformel

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0)$$

mit $\frac{o(x-x_0)}{x-x_0} \to 0$ für $x \to x_0$, das heisst, in einer hinreichend kleinen Umgebung von x_0 wird $f(x)$ durch

$$l(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

linear approximiert, man sagt auch *in erster Näherung* approximiert und schreibt

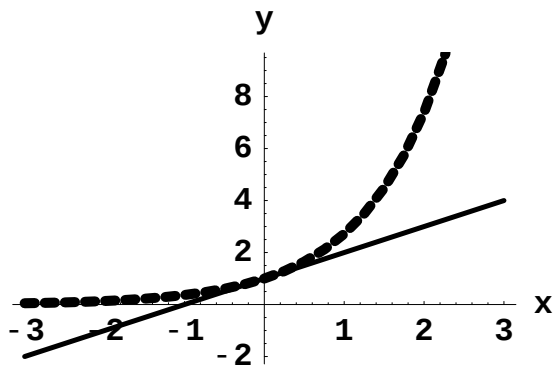
$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Idee: Approximiere $f(x)$ durch ein Polynom höheren Grades, also

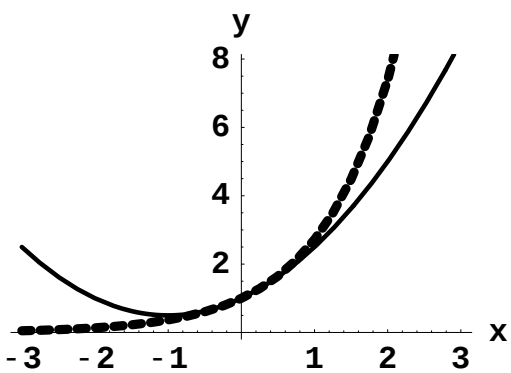
$$f(x) \approx P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot (x - x_0)^k,$$

falls x in einer vorgegebenen Umgebung von x_0 liegt.

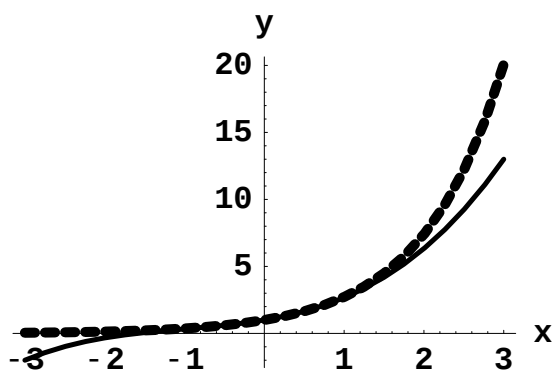
Illustration: **Lineare, quadratische und kubische Approximation von e^x nahe $x_0 = 0$**



$$P_1(x) = 1 + x$$



$$P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$



$$P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

Präzisierung der Idee:

Sei f beliebig oft differenzierbar. Für die erste Näherung $l(x)$ gilt ja

$$l(x_0) = f(x_0), \quad l'(x_0) = f'(x_0).$$

Wähle die n-te Näherung $P_n(x)$ so, dass

$$P_n(x_0) = f(x_0),\ P_n'(x_0) = f'(x_0),\ \ldots,\ P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0). \quad (*)$$

Ansatz: $P_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \ldots + A_n(x - x_0)^n.$

Wie sind $A_0, \ldots, A_n$ zu wählen, damit (*) gilt?

$$\begin{array}{lll}
P_n(x_0) = A_0, & \text{also setze} & A_0 := f(x_0) \\
P_n'(x_0) = A_1, & \text{also setze} & A_1 := f'(x_0) \\
P_n''(x_0) = 2A_2, & \text{also setze} & A_2 := \frac{1}{2} f''(x_0) \\
 & \vdots & \\
P_n^{(k)}(x_0) = k!A_k, & \text{also setze} & A_k := \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) \\
 & \vdots &
\end{array}$$

Mit $f^{(0)}(x_0) := f(x_0)$ gilt für $k = 0, 1, \ldots, n$:

$$A_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

Definition Sei $f^{(0)}(x_0) := f(x_0)$ und wie üblich $f^{(k)}(x_0)$ die k-te Ableitung von f in x_0. Das Polynom

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

heisst *n-tes Taylorpolynom* von f an der Stelle x_0.

Beispiel. Sei

$$f(x) = e^{1-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom $P_2(x)$ von f an der Stelle $x_0 = 1$:

$$\begin{aligned} f^{(0)}(1) &= f(1) = e^0 = 1 \\ f'(1) &= -2xe^{1-x^2} \mid_{x=1} = -2 \\ f''(1) &= (-2e^{1-x^2} + 4x^2e^{1-x^2}) \mid_{x=1} = 2 \end{aligned}$$

Ergebnis:

$$P_2(x) = 1 - \frac{2}{1}(x-1) + \frac{2}{2}(x-1)^2 = 4 - 4x + x^2.$$

Ist $P_n(x)$ das n-te Taylor-Polynom von $f : D \to \mathbb{R}$ in x_0, dann bleibt für jedes $x \in D$ ein Rest

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x).$$

Welche Grössenordnung hat dieser Rest? Eine Antwort gibt der

Satz von Taylor Sei f auf einem Intervall D $(n+1)$-mal differenzierbar. Dann existiert für beliebige $x_0, x \in D$ ein $\theta \in (0,1)$, so dass

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x)\,, \qquad \text{wobei}$$

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)) \qquad \textit{Lagrange-Restglied}$$

Diese Darstellung heisst *Taylor-Formel* oder Taylor-Entwicklung für f an der Stelle x_0. Der Punkt $\xi := x_0 + \theta(x - x_0)$ für $0 < \theta < 1$ liegt offenbar zwischen x_0 und x, ist also eine sogenannte "*Zwischenstelle*". Das Lagrange-Restglied gibt somit eine Formel für $R_n(x)$, $x \in D$, unter Verwendung einer (unbekannten) Zwischenstelle.

Bemerkung: Der Satz von Taylor für $n = 0$ liefert gerade die Aussage des *Mittelwertsatzes der Differentialrechnung*. In der Tat beweist man den Satz von Taylor durch wiederholte Anwendung des Mittelwertsatzes, vgl. z.B. *Kall, Analysis für Ökonomen*.

Restglied in o(·)-Form: Für $R_n(x)$ und $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$ $(x \neq x_0)$ in der Taylor-Formel gilt

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + \left[\frac{f^{(n+1)}(\xi) - f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}\right](x-x_0)^{n+1}.$$

Fasst man den rechten Summanden als neuen Fehlerterm auf und dividiert ihn durch $(x - x_0)^{n+1}$, dann folgt bei Stetigkeit der $(n+1)$-ten Ableitung $f^{(n+1)}$, dass man die Taylor-Formel auch so schreiben kann:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^{n+1}).$$

Für $n = 0$ ist das gerade die Linearisierungsformel für differenzierbare Funktionen.

*mit der bekannten $o(\cdot)$-Notation, die $\lim_{t\to 0} o(t)/t = 0$ bedeutet, und wegen $\lim_{x\to x_0} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)) = f^{(n+1)}(x_0)$

Taylor-Reihen

Für $f(x) = e^x$, entwickelt an der Stelle $x_0 = 0$, lässt sich zeigen

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} P_n(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

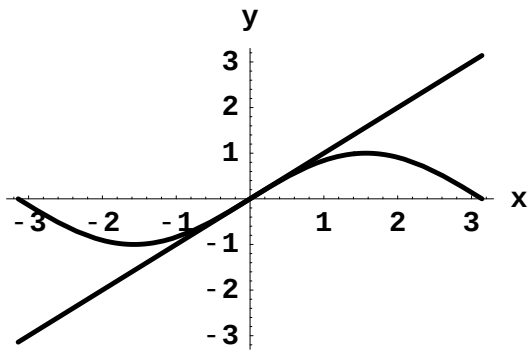
also in Form einer Reihe geschrieben (man beachte $0! := 1$):

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

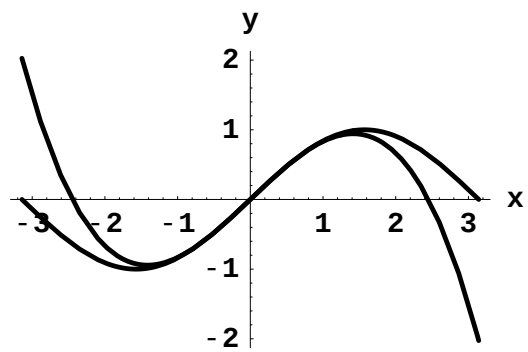
Das ist die sogenannte *Taylor-Reihe* der Funktion e^x, die wichtig ist u.a. für die numerische Approximation von e^x. Analog haben wir z.B. die Taylor-Reihen

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

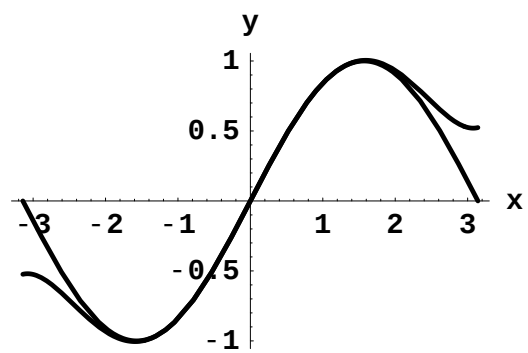
Beispiel: Taylor-Approximation für sin x. $f(x) := \sin x$, entwickelt in $x_0 = 0$. Man beachte $P_1(x) = P_2(x)$, $P_3(x) = P_4(x)$ usw. wegen $f^{(2\nu)}(0) = 0$ für alle $\nu = 0, 1, 2, \ldots$



$$P_1(x) = x$$



$$P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$



$$P_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Anwendung des Satzes von Taylor: Hinreichende Optimalitätsbedingungen von höherer Ordnung

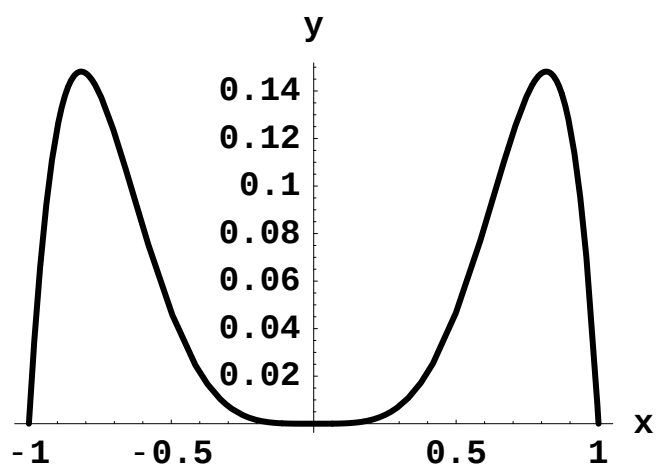
Im Beispiel

$$f(x) = x^4 - x^6$$

gilt

$$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0, \quad \text{aber } f^{(4)}(0) > 0.$$

Vermutung: Im stationären Punkt $x_0 = 0$ liegt ein *relatives Minimum* vor, weil die Ordnung der ersten von Null verschiedenen Ableitung in x_0 *gerade* und ihr Wert *positiv* ist.



Die Richtigkeit der Vermutung <u>im allgemeinen</u> sieht man mit dem Satz von Taylor: Seien $f : D \to \mathbb{R}$, D ein Intervall, f hinreichend oft differenzierbar, $x_0 \in D$ und $x \in D \setminus \{x_0\}$. Dann existiert ein ξ zwischen x_0 und x, so dass

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n .$$

Falls ein n existiert, so dass

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0,$$

und falls x nahe genug bei x_0 ist, so können wir annehmen, dass $f^{(n)}(\xi)$ das gleiche Vorzeichen wie $f^{(n)}(x_0)$ hat (denn $f^{(n)}(\cdot)$ ist stetig und ξ liegt zwischen x_0 und x), d.h.,

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n \begin{cases} > 0, \text{ falls } f^{(n)}(x_0) > 0,\ n \text{ gerade} \\ < 0, \text{ falls } f^{(n)}(x_0) < 0,\ n \text{ gerade} \\ \text{Vorzeichenwechsel in } x_0, \\ \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Satz (Hinreichende Optimalitätsbedingung n-ter Ordnung)

Sei f n-mal stetig differenzierbar auf $U_\delta(x_0)$, $\delta > 0$, und es sei

$$f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

und

$$f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Dann gilt:

a. Ist n gerade und ist $f^{(n)}(x_0) > 0$ erfüllt, so hat f in x_0 ein relatives Minimum.
b. Ist n gerade und ist $f^{(n)}(x_0) < 0$ erfüllt, so hat f in x_0 ein relatives Maximum.
c. Ist n ungerade, so hat f in x_0 kein relatives Extremum. In diesem Falle heisst x_0 *Sattelpunkt* von f.

Bemerkung: Der oben gegebene Beweis zeigt, dass die relativen Extrema in den Aussagen a. und b. sogar strikt sind.

Beispiel zur Anwendung des Satzes von Taylor: Fehlerabschätzung mit dem Lagrange-Restglied

Sei $f(x) = \sin x$ und $I = [0, \frac{\pi}{6}]$. Schätze ab: $\max_{x \in I} |R_1(x)|$

Dazu wird f an der Stelle x_0 entwickelt. Mit $f(0) = \sin 0 = 0$, $f'(x) = \cos x$, d.h. $f'(0) = 1$, und $f''(x) = -\sin x$ ergibt sich die Taylorformel mit Lagrange-Restglied $R_1(x)$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}(x-0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-0)^2 = x - \frac{1}{2}(\sin \xi)x^2.$$

Dabei ist ξ irgendein (unbekanntes) Element aus dem Intervall $(0, x)$. Da $\sin \xi$ auf $I = [0, \frac{\pi}{6}]$ monoton steigend ist und $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, folgt $|R_1(x)| = |\frac{1}{2}(\sin \xi)x^2| \leq \frac{1}{4}x^2$ und somit

$$\max_{x \in [0, \frac{\pi}{6}]} |R_1(x)| \leq \frac{1}{4}(\frac{\pi}{6})^2 < 0.069.$$

Mit Hilfe des Lagrange-Restglieds haben wir ermittelt: Die gesuchte maximale Abweichung ist auf jeden Fall < 0.069. Zum Vergleich: Die exakte Lösung dieses Extremwertproblems liefert

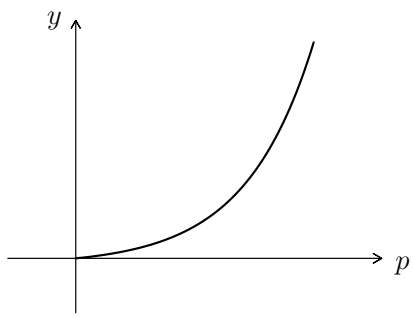
$$\max_{x \in [0, \frac{\pi}{6}]} |R_1(x)| = \max_{x \in [0, \frac{\pi}{6}]} (x - \sin x) = \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} \approx 0.024.$$

Ökonomisches Beispiel zur Anwendung des Satzes von Taylor

Wir betrachten das Beispiel einer Angebotsfunktion:

$$y(p) = e^p - 1, \;\; p > 0.$$

Dabei sind p der Preis und $y = y(p)$ die angebotene Menge.



Problem: Man bestimme den Bereich, in dem das Angebot preiselastisch ist. Zur Erinnerung: y heisst in $p = p_0$ *elastisch*, falls $|\varepsilon_y(p_0)| > 1$, und *unelastisch*, falls $|\varepsilon_y(p_0)| < 1$.

Die Preiselastizität des Angebots in diesem Beispiel ist

$$\varepsilon_y(p) = \frac{p}{y(p)} \cdot y'(p), \quad p > 0\,.$$

Einsetzen der Beispielfunktion $y(p) = e^p - 1$ liefert

$$\varepsilon_y(p) = \frac{p\ e^p}{e^p - 1}, \quad p > 0$$

Für $p > 0$ ist offenbar $\varepsilon_y(p) > p$, d.h. $|\varepsilon_y(p)| = \varepsilon_y(p)$ und speziell

$$\varepsilon_y(p) > 1, \quad \text{falls } p \geq 1.$$

Für $0 < p < 1$ gilt ebenfalls $\varepsilon_y(p) > 1$, denn der Satz von Taylor liefert mit einer Zwischenstelle $\xi \in (0, p)$

$$\begin{aligned} & e^{-p} = 1 - p + e^{\xi}\ \frac{p^2}{2} > 1 - p \qquad | \cdot e^p \\ \Rightarrow\ & 1 > e^p - p\ e^p \\ \Rightarrow\ & p\ e^p > e^p - 1\ (> 0) \\ \Rightarrow\ & \varepsilon_y(p) = \frac{p\ e^p}{e^p - 1} > 1, \end{aligned}$$

also ist die Beispielfunktion $y = y(p)$ auf $(0, +\infty)$ elastisch.

Für $p \to +\infty$ haben wir im Beispiel wegen $e_y(p) > p$ $(\forall p > 0)$ sofort $\lim\limits_{p \to +\infty} \varepsilon_y(p) = +\infty$.

5.6. Die Regeln von de L'Hospital [Ro §6.7], [SH §7.11]

Ziel: Behandlung unbestimmer Ausdrücke der Form

$$\frac{0}{0}, \ \frac{\infty}{\infty}, \ 0 \cdot \infty \qquad \text{usw.}$$

Im Beispiel der Preiselastizität des Angebots für $y(p) = e^p - 1$ auf den vorhergehenden Seiten wäre es z.B. interessant,

$$\lim_{p \to 0^+} \varepsilon_y(p) = \lim_{p \to 0^+} \frac{p \ e^p}{e^p - 1}$$

zu berechnen, doch dazu versagt das Kriterium für den Grenzwert von Quotienten, da Zähler <u>und</u> Nenner für $p \to 0^+$ jeweils gegen 0 konvergieren, also ein unbestimmter Ausdruck der Form $\frac{0}{0}$ vorliegt.

> Die Regeln von de L'Hospital – auch "Regeln von Bernoulli-L'Hospital" genannt – geben die Möglichkeit, die Quotientenregel für die Bestimmung des Grenzwertes einer Funktion zu erweitern auf "unbestimmte Ausdrücke" $\frac{0}{0}$ bzw. $\frac{\infty}{\infty}$.

Joh. Bernoulli (1667-1748) schweiz. Math., de L'Hospital (1661-1704) frz. Math.

Satz: L'Hospitalsche Regel Nr. 1

$\frac{0}{0}$ "Limesform"

Voraussetzungen: Sei $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ und f, g (mindestens) auf $U_\delta(x_0)\backslash\{x_0\}$ definiert und dort differenzierbar. Ferner sei erfüllt:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0;$$
$$g'(x) \neq 0 \qquad \forall x \in U_\delta(x_0)\backslash\{x_0\};$$
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ existiert.}$$

Dann gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Die Regel gilt sinngemäss auch für einseitige Grenzwerte.

Beispiel L'Hospital 1: $\boxed{\frac{0}{0}}$

$$\varepsilon_y(p) = \frac{pe^p}{e^p - 1}, \quad p > 0$$

Mit $f(p) = p\ e^p$ und $g(p) = e^p - 1$ gilt

$$\lim_{p \to 0+} f(p) = \lim_{p \to 0+} g(p) = 0$$

und

$$f'(p) = e^p + pe^p, \quad g'(p) = e^p,$$

und wir haben

$$\lim_{p \to 0+} \frac{f'(p)}{g'(p)} = \lim_{p \to 0+} (1 + p) = 1.$$

Folglich gilt $\lim_{p \to 0+} \varepsilon_y(p) = 1$, d.h. y ist "näherungsweise 1-elastisch" in $p = 0$.

Wichtiger Hinweis: In den folgenden Beispielen L'Hospital 2-7 sind die Grenzwertbildungen eigentlich "von hinten nach vorn" (oder "von rechts nach links") zu lesen!

Beispiel L'Hospital 2: $\boxed{\text{wiederholte Anwendung von } \frac{0}{0}}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x - \sin\ x} &= \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{1 - \cos\ x} && \leftarrow \frac{f'}{g'} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{6x}{\sin\ x} && \leftarrow \frac{f''}{g''} \\
&= \frac{6}{1} && \leftarrow \frac{f'''}{g'''} \\
&= 6
\end{aligned}$$

Beispiel L'Hospital 3: $\boxed{\frac{0}{0}}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} && \leftarrow \frac{f'}{g'} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{(\cos^2 x)(1 - \cos x)} && \leftarrow \text{Vereinfachung} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} && \leftarrow \text{binomische Formel} \\
&= 2 && \leftarrow \text{Quotient von Limites}
\end{aligned}$$

Satz: L'Hospitalsche Regel Nr. 2

$\frac{\infty}{\infty}$ "Limesform"

Voraussetzungen: Sei $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ und f, g (mindestens) auf $U_\delta(x_0)\backslash\{x_0\}$ definiert und dort differenzierbar. Ferner sei erfüllt:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad \text{oder} \quad = -\infty,$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty \quad \text{oder} \quad = -\infty,$$

$$g'(x) \neq 0 \qquad \forall x \in U_\delta(x_0)\backslash\{x_0\};$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{existiert.}$$

Dann gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Bemerkungen

(1) Falls f und g von höherer Ordnung differenzierbar sind und $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ selbst ein unbestimmter Ausdruck ist, kann man $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$ usw. untersuchen, vgl. Beispiel L'Hospital 2.

(2) Die Regeln 1 und 2 sowie die Bemerkung (1) gelten sinngemäss auch für einseitige Grenzwerte bzw. Grenzwerte für $x \to \pm\infty$. Ferner darf $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ usw. uneigentlicher Grenzwert sein.

(3) Liegen unbestimmte Ausdrücke der Form $0 \cdot \infty$, $+\infty - \infty$, 0^0 etc. vor, versuche man, sie auf unbestimmte Ausdrücke der Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ zu transformieren, wir zeigen das unten an Beispielen.

Beispiel L'Hospital 4: $\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$

Sei $\alpha > 0$ und bestimme

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$$

$\longleftarrow$ Regel 2

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$$

Fakultative Übungen: $\boxed{1^\infty \text{ bzw. } \infty^0}$

Zeigen Sie

$$1^\infty: \quad \lim_{x\to 0^+} (2^x)^{\frac{1}{\sin x}} = 2$$

(Hinweis: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (d.h., $\frac{0}{0}$) und Potenzgesetze anwenden),

$$\infty^0: \quad \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^x = 1$$

(Hinweis: Logarithmieren führt auf einen Ausdruck $0 \cdot \infty$, der in Beispiel L'Hospital 5 behandelt wird).

Beispiel L'Hospital 5: $\boxed{0 \cdot \infty}$

$$\lim_{x \to 0^+} \left(x \ln \frac{1}{x} \right)$$

$\longleftarrow$ Umformung auf $\frac{\infty}{\infty}$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

$\longleftarrow$ Regel 2

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{x \cdot (-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}}$$

$\longleftarrow$ kürzen

$$= \lim_{x \to 0^+} x$$

$$= 0$$

Beispiel L'Hospital 6: $\boxed{\infty - \infty}$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$$

$\longleftarrow$ Umformung auf $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)}$$

$\longleftarrow$ $\dfrac{f'}{g'}$ (Regel 1)

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x}$$

$\longleftarrow$ $\dfrac{f''}{g''}$ (Regel 1)

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x}$$

(nach Standard-Rechenregeln für Grenzwerte)

$$= \frac{1}{2}$$

Beispiel L'Hospital 7: $\boxed{0^0}$

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\cdot \ln x}$$

$\longleftarrow$ Stetigkeit der Exponentialfunktion

$$= e^{\left(\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot \ln x\right)}$$
$$= e^0$$
$$= 1$$

wegen

$$\lim_{x\to 0^+} (x\cdot \ln x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

$\longleftarrow$ Regel 2

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$\longleftarrow$ Umformen

$$= \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$

6. Differentialrechnung der Funktionen in mehreren Variablen

[SH §11], [Ro §7]

6.1. Einführung

[SH §§11.1-11.4], [Ro §§7.1-7.2]

Einführungsbeispiel: Produktionsfunktion

X sei der Output, $r_1, r_2, \ldots, r_n$ bezeichne n Produktionsfaktoren und

$$X = X(r_1, r_2, \ldots, r_n)$$

ist eine gegebene Produktionsfunktion. Hier ist X *abhängige* Variable, r_1, r_2, ..., r_n sind *unabhängige* Variable.

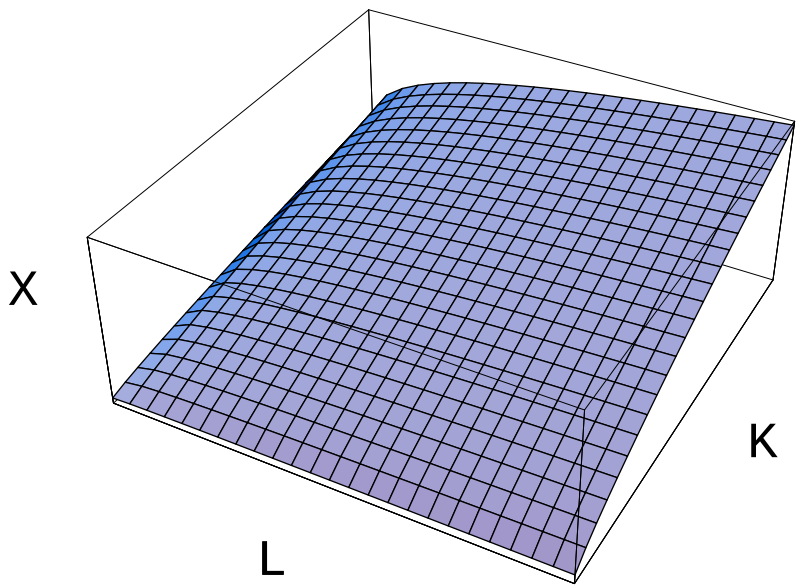
Mit $c, \alpha, \beta > 0$ Konstanten (häufig $\beta = 1 - \alpha$, $0 < \alpha < 1$) und mit L Arbeitseinsatz, K Kapitaleinsatz betrachten wir z.B. eine Funktion vom *Cobb-Douglas-Typ*

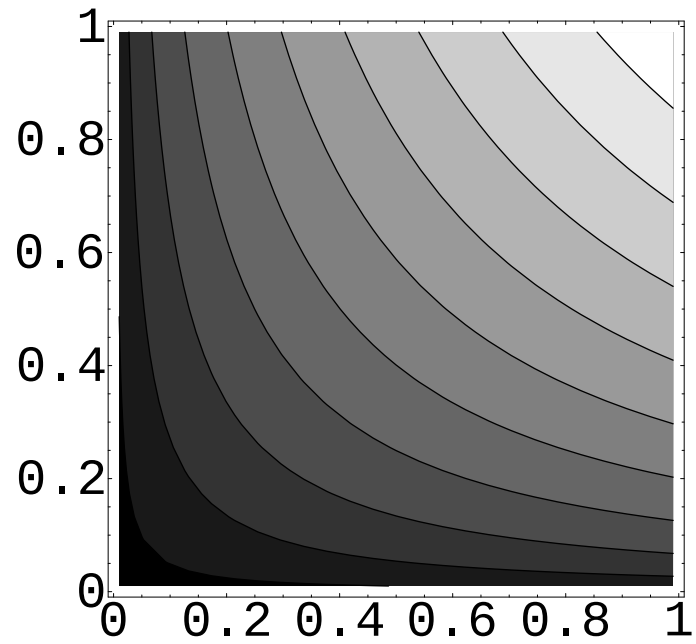
$$X = c\, L^{\alpha}\, K^{\beta}.$$

3D-Grafik und Isolinien der Cobb-Douglas-Funktion

$$X = \ c\ L^{\alpha}\ K^{\beta}.$$

für $c = 1$ und $\alpha = \beta = 0.5$:





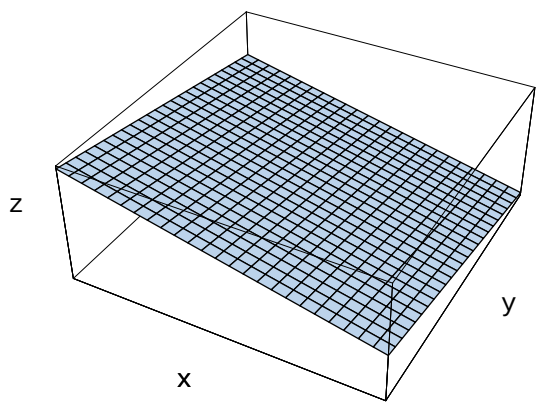
Definition Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Dann heisst

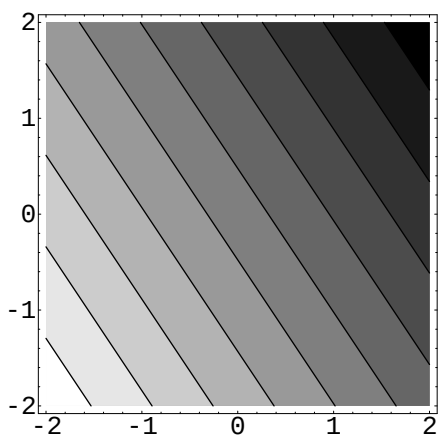
$$\begin{array}{rccc} f: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, ..., x_n) & \mapsto & f(x_1, ..., x_n) \end{array}$$

reellwertige Funktion in n (reellen unabhängigen) Variablen oder kurz *Funktion in mehreren Variablen*.

Bemerkung: In unserer Vorlesung im Herbstsemester beschränken wir uns im wesentlichen auf Funktionen in zwei Variablen $z = f(x, y)$.

Veranschaulichung von Funktionen in zwei Variablen





Veranschaulichung von $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$ mit 3-D-Grafik und Isolinien

Horizontalschnitte, Isoquanten

Bekannt aus Wanderkarten sind z.B. Höhenlinien: Punkte gleicher Höhe über NN werden miteinander verbunden, d.h., es werden horizontale Schnitte (= Schnitte senkrecht zur Höhenachse) durch den Graphen von f in die (x, y)-Ebene projiziert.

Allgemein heissen für $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ die Mengen

$$H_\gamma = \{(x, y) \in D \mid f(x, y) = \gamma\}, \ \gamma \in \mathbb{R},$$

Niveaumengen, wenn es sich dabei um eine Kurve handelt, spricht man von *Isoquanten* oder *Isolinien* oder *Niveaulinien* von f zum *Niveau* γ.

Z.B.: Isoquanten zu $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$ ergeben sich aus

$$\gamma = 6 - 3x - 2y \Leftrightarrow \ 2y = -3x + 6 - \gamma \ \Leftrightarrow \ y = -\frac{3}{2}x + (3 - \frac{\gamma}{2}),$$

das ist die o.a. Schar paralleler Geraden mit Anstieg $-\frac{3}{2}$.

Die (oben für $\alpha = \frac{1}{2}$ gezeigten) Isolinien der Cobb-Douglas-Funktion

$$f(x,y) = c\ x^{\alpha} y^{1-\alpha},\ \ x > 0,\ \ y > 0$$

mit Konstanten $c > 0,\ 0 < \alpha < 1$: für ein festes Niveau $\gamma > 0$ gilt

$$\gamma = c\ x^{\alpha} y^{1-\alpha} \ \Leftrightarrow\ y^{1-\alpha} = \frac{\gamma}{c} x^{-\alpha} \ \Leftrightarrow\ y = (\frac{\gamma}{c} x^{-\alpha})^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Lassen wir im Definitionsbereich von f $x = 0$ oder $y = 0$ zu, so gilt

$$f(x,y) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0 \text{ oder } y = 0 \quad \text{(Achsenkreuz).}$$

Vertikalschnitte

Das sind ebene Schnitte, senkrecht zur $x - y-$Ebene, insbesondere Schnitte

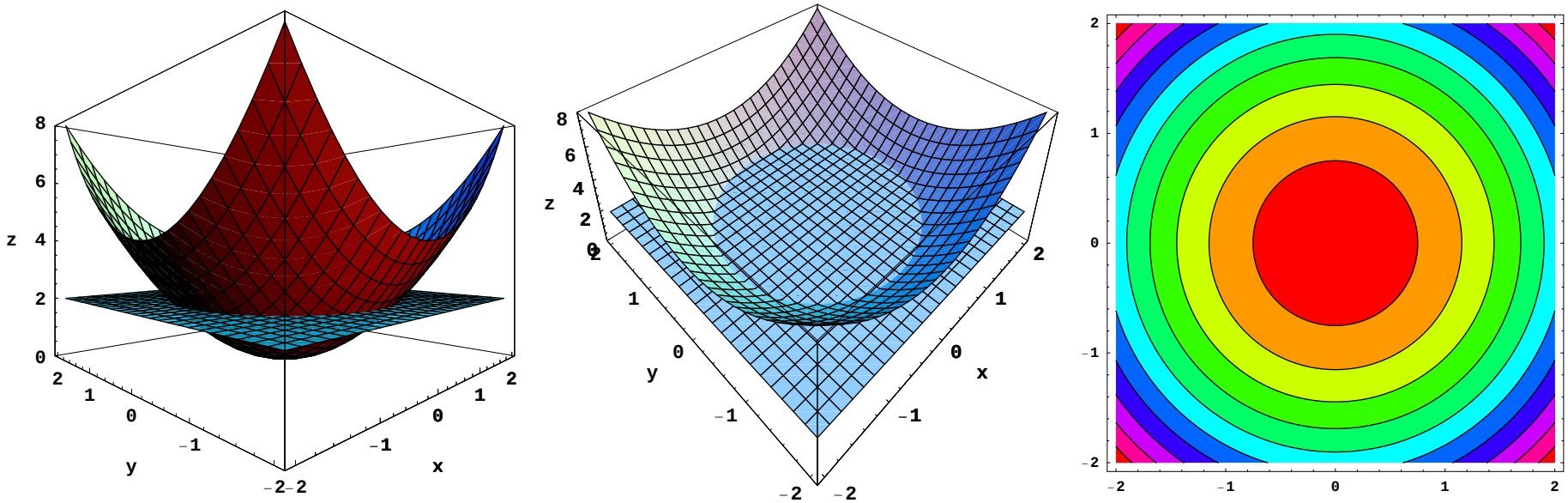
senkrecht zur x-Achse	d.h.	$\{(x,y,z) \in G_f \mid x = x_0\}$ (x_0 konstant)
senkrecht zur y-Achse	d.h.	$\{(x,y,z) \in G_f \mid y = y_0\}$ (y_0 konstant)

Das ist ein wichtiges - auch ökonomisches (!) - Analyseprinzip: siehe Begriff **partielle Ableitung**.

Kommerzielle Grafikprogramme erlauben die Darstellung von Vertikal- und Horizontalschnitten, vgl. die *Mathematica*--Darstellung des Graphen von

$$z = f(x, y) := x^2 + y^2,$$

horizontal geschnitten mit der Ebene $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2\}$ aus verschiedenen Perspektiven sowie der Isoquanten von f:



Grenzwert und Stetigkeit für Funktionen mehrerer Variabler

Nach dem Satz des Pythagoras gilt in einem rechtwinkligen Dreieck ΔABC mit der Hypothenuse $\overline{BC}$ bei den Koordinaten $B = (x_B, y_B)$ und $C = (x_C, y_C)$:

$$(\text{Länge der Strecke } \overline{BC})^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2.$$

Deshalb definiert man den *euklidischen Abstand* zwischen $B = (x_B, y_B)$ und $C = (x_C, y_C)$ mittels

$$\|(x_C, y_C) - (x_B, y_B)\| := \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}.$$

Die Funktion $(x, y) \mapsto \|(x, y)\|$ heisst *euklidische Norm*.

Ist in der Ebene ein Punkt (x_0, y_0) gegeben, so definiert man die (offene) *δ-Umgebung um (x_0, y_0)* bezüglich der euklidischen Norm durch

$$U_\delta(x_0, y_0) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta\} \quad (\delta > 0)$$

Offenbar ist das die Fläche, die durch einen Kreis mit Radius δ um (x_0, y_0) eingeschlossen wird (ohne Rand).

Übungsaufgabe 1: Veranschaulichen Sie sich diese aus der Schule bekannten Begriffe geometrisch!

Übungsaufgabe 2: Wie würde eine δ-Umgebung um (x_0, y_0) aussehen, wenn man sie statt mit der euklidischen Norm mittels der sogenannten Maximumnorm definiert, d.h., als die Menge

$$B_\delta(x_0, y_0) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x - x_0|, |y - y_0| < \delta\}?$$

Definition *Limes (Grenzwert) einer Folge*

Man sagt, eine Folge $\{(x_n, y_n)\}$ *konvergiert* gegen einen *Limes* (oder *Grenzwert*) (x_0, y_0), wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$(x_n, y_n) \in U_\varepsilon(x_0, y_0) \qquad \forall n \geq n(\varepsilon).$$

Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0)$.

Analog lautet die Definition für den Limes einer Folge im $\mathbb{R}^m$, $m \geq 3$.

Satz. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \text{ und } \lim_{n\to\infty} y_n = y_0.$$

Analog lautet der Satz für den Grenzwert einer Folge im $\mathbb{R}^m$, $m \geq 3$.

Beispiele:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n^2}) = (1, 2)$, (ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}, -\frac{1}{n^2}) = (0, 1, 0)$.

Definition *Grenzwert einer Funktion*

Eine Funktion $(x, y) \mapsto f(x, y)$ sei mindestens auf $U_\delta(x_0, y_0) \backslash \{(x_0, y_0)\}$ definiert, $\delta > 0$. Falls für *jede* Folge $\{(x_n, y_n)\}$ mit

$$\lim_{n \to \infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0)$$

die Folge der Funktionswerte $\{f(x_n, y_n)\}$ gegen den stets gleichen Grenzwert φ konvergiert, so schreiben wir

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x, y) = \varphi$$

und sagen: φ ist *Grenzwert von f in (x_0, y_0)*.

Definition *Stetigkeit einer Funktion*

Eine Funktion $(x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2 \mapsto f(x, y)$ heisst *stetig im Punkt* $(x_0, y_0) \in D$, wenn f auf einer δ-Umgebung $U_\delta(x_0, y_0)$ definiert ist und wenn gilt

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0),$$

sie heisst *stetig* (auf D), wenn f in jedem Punkt von D stetig ist.

Bemerkung: Wie im Fall reeller Funktionen sind *Summen, Differenzen, Produkte, Quotienten* (Nenner $\neq 0$!) sowie *Zusammensetzungen* stetiger Funktionen in zwei Variablen wieder stetig.

Beispiel:

$$\frac{\cos(x \cdot y^3)}{e^{x+y}} \text{ ist stetig über dem } \mathbb{R}^2.$$

Extremwertsatz für stetige Funktionen

[SH §13.4]

Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ wird *abgeschlossen* genannt, falls für jede Folge $\{(x_n, y_n)\} \subseteq M$, die gegen einen Limes (x_0, y_0) konvergiert, dieser Limes zur Menge M gehört. Anschaulich: Der Rand von M gehört zur Menge M dazu.

Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ heisst *beschränkt*, wenn ein $c > 0$ existiert mit

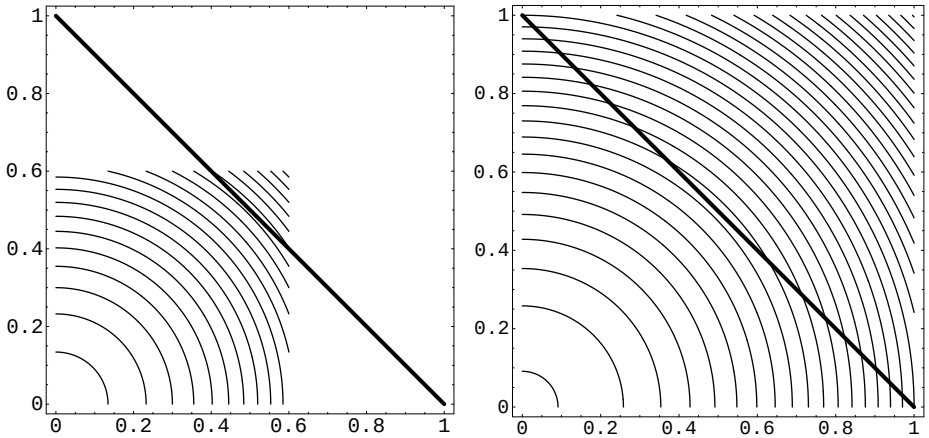
$$\|(x, y)\| \leq c \quad \forall (x, y) \in M.$$

Extremwertsatz von Weierstrass Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^2$ eine stetige Funktion und $M \subseteq D$ eine beschränkte, abgeschlossene Menge. Dann nimmt f auf M sowohl ihr Maximum als auch ihr Minimum an, d.h., es gilt

$$\arg\max_{(x,y)\in M} f(x,y) \neq \emptyset \quad \text{und} \quad \arg\min_{(x,y)\in M} f(x,y) \neq \emptyset.$$

Beispiel: Löse $\min f(x,y)$ und $\max f(x,y)$ bezüglich $(x,y) \in M$ für

$$f(x,y) := x^2 + y^2, \qquad M := \{(x,y) \,|\, x + y = 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$$



M ist beschränkt und abgeschlossen (Warum?)

globaler Minimalpunkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
glob. Maximalpunkte $(1,0)$, $(0,1)$

6.2. Tangentialfläche und totales Differential

[Ro §7.4], [SH §§11.1-3, 12.7-8]

Repetition: partielle Ableitungen. Eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ heisst *an der Stelle $(x_0, y_0) \in D$ partiell nach x differenzierbar*, wenn die Funktion $x \mapsto f(x, y_0)$ in x_0 differenzierbar ist, also der Grenzwert

$$f_x(x_0, y_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

existiert. $f_x(x_0, y_0)$ heisst *partielle Ableitung von f nach x an der Stelle (x_0, y_0)*. Die partielle Differenzierbarkeit nach y an der Stelle (x_0, y_0) und der Grenzwert $f_y(x_0, y_0)$ sind analog definiert.

Als *partielle Ableitungen von f nach x bzw. y* bezeichnet man wie im eindimensionalen Fall die Funktionen

$$(x, y) \mapsto f_x(x, y), \qquad (x, y) \mapsto f_y(x, y),$$

das sind nun Funktionen in zwei Variablen!

Linearisierungssatz [Lehrbuchliteratur präzisiert]

Sei f eine Funktion von $D \subseteq \mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$ und $U_\delta(x_0, y_0) \subseteq D$, $\delta > 0$, eine Umgebung von (x_0, y_0). Sind die partiellen Ableitungen

f_x und f_y auf $U_\delta(x_0, y_0)$ definiert und stetig im Punkt (x_0, y_0),*

so existiert eine Funktion $o : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ so dass

$$(*) \quad f(x, y) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy + o(dx, dy)$$

mit $\frac{o(dx,dy)}{\|(dx,dy)\|} \to 0$ gilt, wobei

$$dx = x - x_0, \;\; dy = y - y_0.$$

Wir können also dann mit Fug und Recht schreiben

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) \approx f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy,$$

falls (x, y) "nahe" (x_0, y_0) ist.

*Man sagt dann, *f ist stetig differenzierbar in (x_0, y_0).*

Definition Eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die der Beziehung $(*)$ genügt, heisst *(total oder Fréchet) differenzierbar im Punkt* (x_0, y_0). Die Funktion

$$(dx, dy) \mapsto df = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$$

heisst das *totale Differential* (auch das *vollständige Differential*) von f an der Stelle (x_0, y_0).

Wegen $dx = x - x_0$, $dy = y - y_0$ wird durch

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0),$$

das ist eine lineare Gleichung in den 3 Unbekannten x, y, z, <u>eine Ebene</u> definiert. Diese heisst *Tangentialebene* an den Graphen von f im Punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Bemerkung: In der Literatur findet man auch den Begriff Tangential*fläche*, unser Begriff Tangential*ebene* ist präziser (denn sie kommt aus einer *linearen* Gleichung).

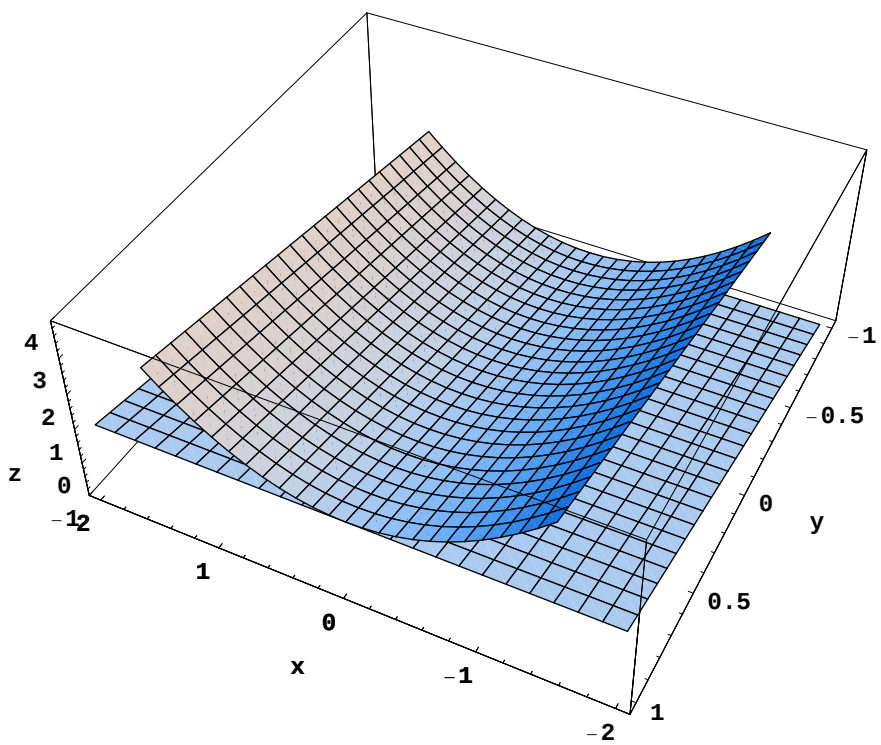
Beispiele. (1) Die Funktion

$$f(x,y) = x^2 + y, \ (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

hat die stetigen partiellen Ableitungen

$$f_x(x,y) = 2x, \ f_y(x,y) = 1, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Sie ist also differenzierbar.



Eingezeichnet sind gph f und die Tangentialebene an gph f in $(0,1,1)$.

(2) *Cobb-Douglas-Funktion* ($0 < \alpha < 1$ gegeben):

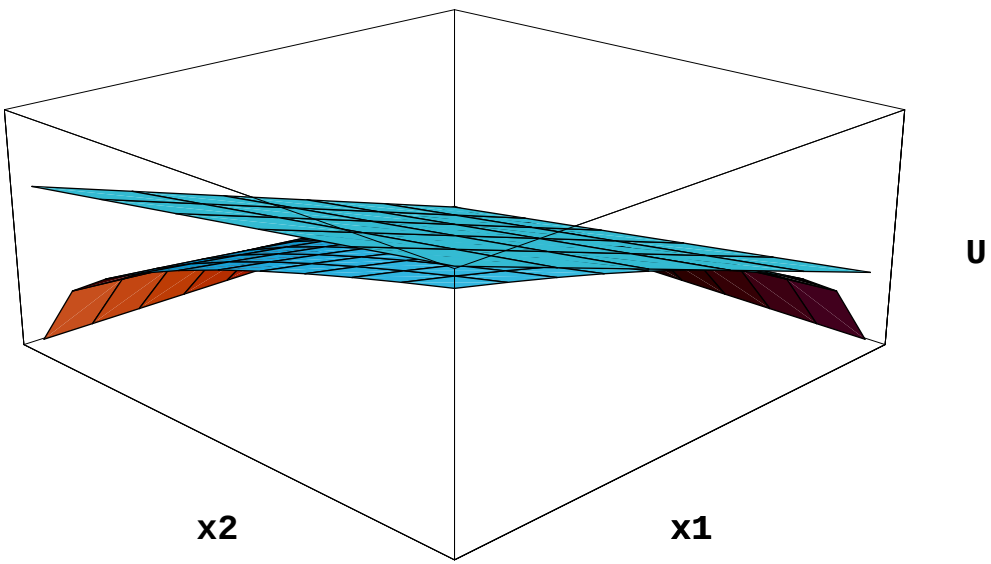
$$U(x_1, x_2) = {x_1}^{\alpha}\ {x_2}^{1-\alpha}$$

hat stetige partielle Ableitungen nach x_1 und x_2 auf

$$D = \{(x_1, x_2) \mid x_1 > 0,\ x_1 > 0\},$$

nämlich

$$U_{x_1}(x_1, x_2) = \alpha\ \frac{{x_2}^{1-\alpha}}{{x_1}^{1-\alpha}}, \qquad U_{x_2}(x_1, x_2) = (1-\alpha)\ \frac{{x_1}^{\alpha}}{{x_2}^{\alpha}}.$$



Eingezeichnet sind $\operatorname{gph} U$ und die Tangentialebene an $\operatorname{gph} U$ in einem Punkt.

(3) Funktion vom *Leontief*-Typ ($a > 0,\ b > 0$ gegeben)

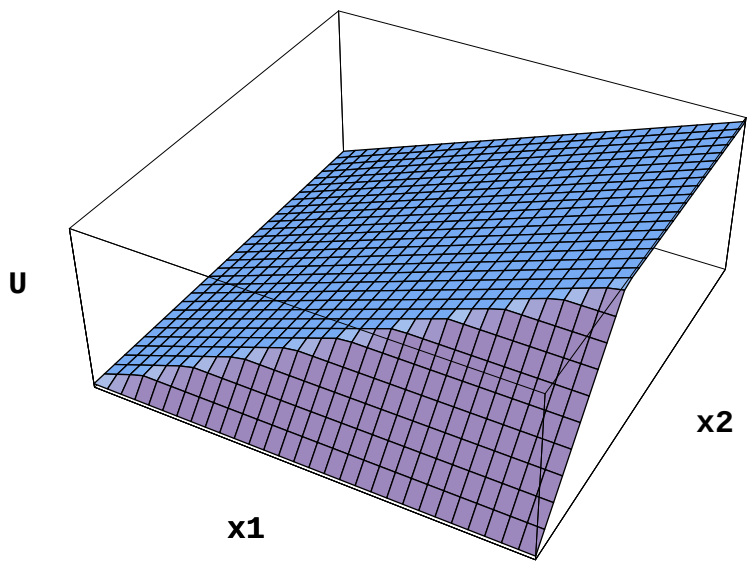
$$U(x_1, x_2) = \min\left\{\frac{x_1}{a},\ \frac{x_2}{b}\right\},\ x_1, x_2 \geq 0,$$

hat überall auf dem positiven Quadranten *mit Ausnahme der Menge*

$$K := \left\{(x_1, x_2)\ \middle|\ \frac{x_1}{a} = \frac{x_2}{b}\right\}$$

(stetige) partielle Ableitungen nach x_1 und x_2.

Dagegen existieren in Punkten der "Knickmenge" K keine partiellen Ableitungen: dort ist U *nicht* differenzierbar.



Eingezeichnet sind gph U, ausserhalb der Menge K ist U differenzierbar.

Bemerkung.

Eine nach x und y partiell differenzierbare Funktion $f(x,y)$ muss *nicht* einmal stetig, geschweige denn total differenzierbar sein!

Beispiel:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}\ , & \text{falls } x^2+y^2>0 \\ 0\ , & \text{falls } x=y=0 \end{cases}$$

Es gilt

$$f(x,0) = f(0,y) \equiv 0, \text{ folglich } \quad f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0.$$

Für $x^2+y^2>0$ gilt

$$f_x(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$
$$f_y(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$\Rightarrow f_x, f_y$ **sind auf $\mathbb{R}^2$ definiert!**

f **ist aber nicht stetig** im Punkt $(0,0)$, man wähle

$$x_n = y_n = \frac{1}{n}, \quad n \to \infty,$$

berechne $f(x_n, y_n)$, und es folgt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \frac{1}{2} > 0 = f(0,0).$$

Man prüft leicht nach, dass die Funktionen f_x und f_y im Nullpunkt nicht stetig sind.

Bemerkungen. 1. Wenn aber f (total) differenzierbar in (x_0, y_0) dann ist f stetig in diesem Punkt. 2. Nach dem Linearisierungssatz ist insbesondere jede stetig differenzierbare Funktion auch total differenzierbar.

Beispiel zum Verständnis des totalen Differentials

Betrachte

$$f(x,y) = \ln(\tfrac{1}{2}\ x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{5}} + \tfrac{1}{2}) \quad x > 0,\ y > 0$$

Berechne das totale Differential df an der Stelle $(x_0, y_0) = (1,1)$. Gesucht ist ferner ein Näherungswert für $f(0.98, 1.01)$.

$$\begin{aligned}
f_x(1,1) &= \frac{1}{4}\ \frac{x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{5}}}{\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{5}} + \frac{1}{2}} && \mid x = 1,\ y = 1 \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \ = \ \frac{1}{4} \\
f_y(1,1) &= \frac{1}{10}\ \frac{x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{4}{5}}}{\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{5}} + \frac{1}{2}} && \mid x = 1,\ y = 1 \\
&= \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \ = \ \frac{1}{10}
\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}
df &= f_x(1,1)dx + f_y(1,1)dy \\
&= \frac{1}{4}dx + \frac{1}{10}dy
\end{aligned}$$

Betrachten wir nun

$$(x, y) = (0.98, 1.01), \ (x_0, y_0) = (1, 1)$$
$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \underbrace{\frac{1}{4}dx + \frac{1}{10}dy}_{df} \qquad .$$

Dann berechnen wir

$$dx = x - x_0 = -0.02\,,$$
$$dy = y - y_0 = 0.01\,,$$
$$f(x_0, y_0) = f(1, 1) = \ln 1 = 0\,.$$

Folglich

$$\begin{aligned} f(0.98, 1.01) &\approx 0 - 0.25 \cdot 0.02 + 0.1 \cdot 0.01 \\ &= -0.005 + 0.001 \\ &= -0.004. \end{aligned}$$

Taschenrechnerwert: $f(0.98, 1.01) \approx -0.0040474$

Zusammenfassung: Idee der Differenzierbarkeit

Gegeben ist für eine (total) differenzierbare Funktion f das Modell

$$(1) \qquad z = f(x, y)\,,$$

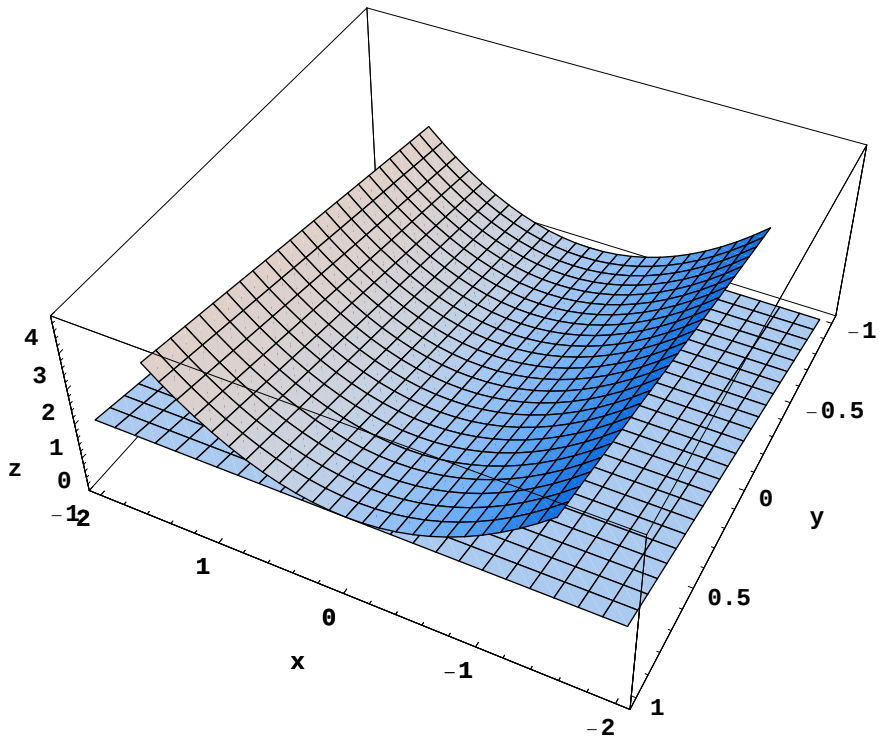
ein – im allgemeinen - *nichtlineares* Modell.

Man ersetzt **lokal**, d.h., "in der Nähe" eines **gegebenen** Punktes (x_0, y_0, z_0) mit $z_0 = f(x_0, y_0)$, dieses nichtlineare Modell durch

$$(2) \qquad z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)\,,$$

ein *lineares* Modell – denn z hängt linear von x und y ab, x_0, y_0 sind konstant.

Durch (1) wird der Funktionsgraph $\operatorname{gph} f$ von f beschrieben (eine *Fläche*), durch (2) wird die Tangential*ebene* $\mathcal{T}$ an $\operatorname{gph} f$ im Punkt (x_0, y_0, z_0) beschrieben.



Eingezeichnet sind gph f und eine Tangentialebene

Die Tangentialebene $\mathcal{T}$ an gph f im Punkt (x_0, y_0, z_0) wird aufgespannt durch zwei Tangenten, die Tangente T_1 an den Vertikalschnitt

$$S_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = f(x, y),\ y = y_0\},$$

d.h., $T_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0),\ y = y_0\}$

und die entsprechende Tangente T_2 (Formel?) an den Vertikalschnitt

$$S_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = f(x, y),\ x = x_0\}.$$

6.3. Der Gradient und seine geometrische Interpretation

[steht nicht in Ro und SH]

Definition *Gradient*

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $\underline{a} = (a_1, a_2) \in D$. Der Vektor

$$\text{grad } f(a_1, a_2) := \begin{pmatrix} f_{x_1}(a_1, a_2) \\ f_{x_2}(a_1, a_2) \end{pmatrix}$$

heisst *Gradient* von f im Punkt $\underline{a} = (a_1, a_2)$. Alternativ findet man auch die Symbole $\nabla f(a_1, a_2)$ (∇ = nabla) oder $Df(a_1, a_2)$.

Wir geben nun Interpretationen des Gradienten als Normalenvektor der Tangente an die Isolinie von f im Punkt $\underline{a}$ und als Richtung des relativ steilsten Anstiegs der Funktionswerte von f vom Punkt $\underline{a}$ aus.

Repetition Schulstoff: Skalarprodukt und Norm

Das *euklidische Skalarprodukt* zweier Vektoren*

$$\underline{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad \underline{b} = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$$

ist definiert durch

$$\underline{a}^\mathsf{T} \underline{b} := a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Bemerkung: Unsere Symbolik mit dem hochgestellten $^\mathsf{T}$ entspricht der Bezeichnungsweise in der Vorlesung *Lineare Algebra* im Frühjahrssemester und wird dort erklärt. In der Literatur findet man auch die Schreibweisen $\underline{a} \cdot \underline{b}$ oder $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$.

Bekanntlich gilt mit γ = Winkel zwischen $\underline{a}$ und $\underline{b}$ die Beziehung

$$\underline{a}^\mathsf{T} \underline{b} = ||\underline{a}|| \; ||\underline{b}|| \cdot \cos \gamma \, .$$

*die wir unterstrichen darstellen

Die *euklidische Norm* von $\underline{a} = (a_1, a_2)^\mathsf{T}$ ist definiert durch

$$\|\underline{a}\| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}.$$

Wir haben bekanntlich für $\underline{a} \neq \underline{o}$, $\underline{b} \neq \underline{o}$:

$$\begin{aligned} \underline{a}^\mathsf{T}\underline{b} = 0 \quad &\Leftrightarrow \|\underline{a}\| \; \underline{b}\| \cdot \cos\gamma = 0 \\ &\Leftrightarrow \gamma = \pm\, 90^\circ \\ &\Leftrightarrow \underline{a} \perp \underline{b} \end{aligned}$$

wobei $\underline{a} \perp \underline{b}$ symbolisiert, dass $\underline{a}$ und $\underline{b}$ aufeinander senkrecht stehen.

Übung: Man veranschauliche die Definition des euklidischen Skalarprodukts und der euklidischen Norm mit Hilfe einer Zeichnung.

In der eingeführten Terminologie liest sich mit

$$\underline{a} := (a_1, a_2),\ \underline{x} := (x_1, x_2),\ \underline{dx} := (dx_1, dx_2) = (x_1 - a_1, x_2 - a_2)$$

das totale Differential von f im Punkt (a_1, a_2),

$$df = f_{x_1}(a_1, a_2)dx_1 + f_{x_2}(a_1, a_2)dx_2,$$

als

$$df = \operatorname{grad} f(\underline{a})^\top \underline{dx},$$

und die Gleichung der Tangentialebene

$$z = f(a_1, a_2) + f_{x_1}(a_1, a_2)(x_1 - a_1) + f_{x_2}(a_1, a_2)(x_2 - a_2)$$

als

$$z = f(\underline{a}) + \operatorname{grad} f(\underline{a})^\top (\underline{x} - \underline{a}).$$

Sei T die Tangente an die Isolinie

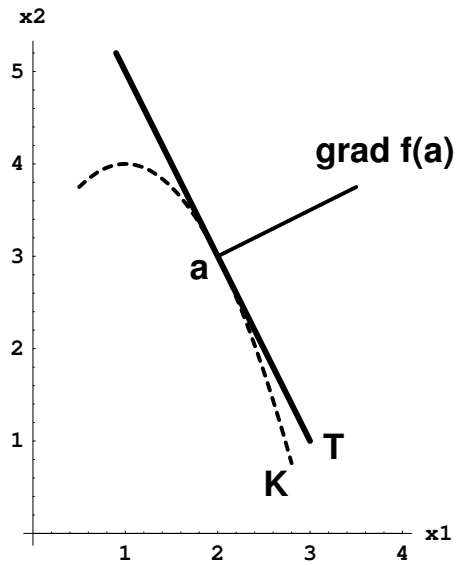
$$K = \{(x_1, x_2) |\ f(x_1, x_2) = f(a_1, a_2)\}$$

der Funktion $f(x_1, x_2)$, angelegt im Punkt $\underline{a} = (a_1, a_2)$.

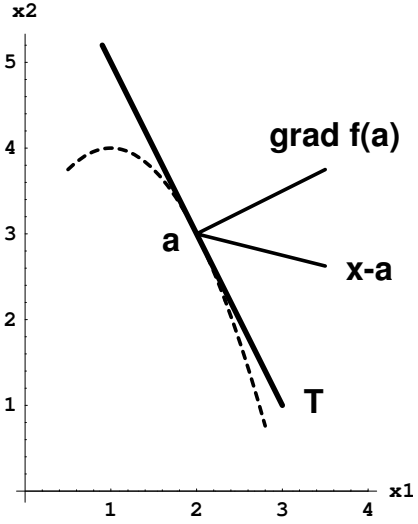
Wir wissen: Die Tangente T enthält alle Punkte, in denen das totale Differential verschwindet, d.h.

$$\underline{x} = (x_1, x_2) \in T \ \Leftrightarrow\ df = 0 \ \Leftrightarrow\ df = \text{grad}\, f(\underline{a})^{\mathsf{T}} (\underline{x} - \underline{a}) = 0,$$

d.h., *der Gradient von f in $\underline{a}$ steht senkrecht auf der Tangente T.*



Sei nun $\underline{a} = (a_1, a_2)$ gegeben sowie $\underline{dx} = \underline{x} - \underline{a}$ eine beliebige Richtung und γ der Winkel zwischen $\underline{x} - \underline{a}$ und grad $f(\underline{a})$.



Dann gilt:

$$\begin{aligned} df &= \text{grad } f(\underline{a})^{\mathsf{T}}(\underline{x} - \underline{a}) \\ &= \| \text{grad } f(\underline{a})\| \cdot \|\underline{x} - \underline{a}\| \cdot \cos\gamma \end{aligned}$$

Der *relative Zuwachs* $\frac{df}{\|\underline{x}-\underline{a}\|}$ berechnet sich folglich mittels

$$\frac{df}{\|\underline{x}-\underline{a}\|} = \|\text{grad } f(\underline{a})\| \cdot \cos\gamma\,.$$

Er wird	$= 0$,	falls $\gamma = \pm\frac{\pi}{2}$	(d.h. $\underline{x} \in T$)
	wird maximal,	falls $\gamma = 0$	(d.h. $\cos\gamma = 1$)
	wird minimal,	falls $\gamma = \pi$	(d.h. $\cos\gamma = -1$)

Lokal ist damit der (relativ) **steilste Anstieg** der Funktionswerte in Richtung des Gradienten, der **steilste Abstieg** in negativer Gradientenrichtung.

6.4. Differentiation parameterabhängiger Funktionen [Ro §7.5], [SH §12.1]

Gegeben sei

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto z = f(x, y).$$

Die Variablen x und y seien selbst Funktionen einer Variablen t, die eine Menge T durchläuft.

Man sagt dann auch: *x und y hängen von einem* **Parameter** *t ab*.

Wir bilden die zusammengesetzte Funktion

$$F(t) = f(x(t), y(t)), \ t \in T.$$

Spezialfall: Seien $x_0, y_0, a, b \in \mathbb{R}$ gegeben. Betrachten

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad t \in T \subseteq \mathbb{R},$$

und - vorausgesetzt, f_x und f_y existieren -

$$df = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy.$$

Wir diskutieren diesen Spezialfall. Sind f_x und f_y stetig in (x_0, y_0), dann gilt nach dem Linearisierungssatz (beachte $dx = at, dy = bt$) :

$$\begin{aligned} & F(t) - F(0) \\ & = f(\underbrace{x_0 + at}_{x(t)}, \underbrace{y_0 + bt}_{y(t)}) - f(x_0, y_0) \\ & = f_x(x_0, y_0) \cdot at + f_y(x_0, y_0) \cdot bt + o(t) \quad \text{mit } o(t)/t \to 0 \end{aligned}$$

nach Kettenregel. Nach Division durch t und Grenzübergang folgt

$$\frac{dF(t)}{dt}|_{t=0} = f_x(x_0, y_0) \cdot a + f_y(x_0, y_0) \cdot b$$

Definition: Gilt $\|(a, b)\| = 1$ so heisst $\underline{h} = (a, b)$ *Richtung im* $\mathbb{R}^2$, und so heisst dann der Ausdruck

$$f_x(x_0, y_0) \cdot a + f_y(x_0, y_0) \cdot b$$

Richtungsableitung von f in Richtung $\underline{h}$, vgl. auch die geometrische Illustration, die in der Vorlesung gegeben wird.

Setzt man die Funktionen $t \mapsto x(t),\ t \mapsto y(t)$ allgemeiner an, so gilt

Satz (verallgemeinerte) Kettenregel

Wir setzen voraus:

1. Die Funktion $t \mapsto F(t) = f(x(t),\ y(t))$ sei in einer Umgebung von $t_0 \in \mathbb{R}$ definiert.
2. Die Funktionen $t \mapsto x(t)$ und $t \mapsto y(t)$ seien differenzierbar in t_0. Es sei $x_0 = x(t_0),\ y_0 = y(t_0)$.
3. Die partiellen Ableitungen $(x, y) \mapsto f_x(x, y)$ und $(x, y) \mapsto f_y(x, y)$ seien auf einer δ-Umgebung $U_\delta(x_0, y_0) \subseteq D$ definiert und in (x_0, y_0) stetig (d.h., f ist stetig differenzierbar in (x_0, y_0)).

Dann ist F in t_0 differenzierbar, und es gilt

$$F'(t_0) = f_x(x_0, y_0) \cdot x'(t_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot y'(t_0)$$

Dabei sind F', x', y' die Ableitungen nach t.

Beispiel zur Illustration der verallgemeinerten Kettenregel:

$$f(x,y) = e^{x+y}, \quad x = x(t) := t^2, \quad y = y(t) := 3t$$

Folglich

$$F(t) = e^{t^2+3t}$$

Für $t_0 \in \mathbb{R}$ berechnen wir nach der Kettenregel für reelle Funktionen:

$$F'(t_0) = (2t_0 + 3)e^{t_0^2+3t_0}$$

Dieses Ergebnis müssten wir auch mit der verallgemeinerten Kettenregel erhalten, in der Tat gilt

$$\begin{aligned} F'(t_0) &= f_x(x_0, y_0) \cdot x'(t_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot y'(t_0) \\ &= e^{x_0+y_0} \cdot 2t_0 + e^{x_0+y_0} \cdot 3 \end{aligned}$$

Mit $x_0 = t_0^2, \quad y_0 = 3t_0$ folgt

$$F'(t_0) = (2t_0 + 3)e^{t_0^2+3t_0}$$

Bemerkung. Die verallgemeinerte Kettenregel hat ihre Bedeutung beim **formalen Differenzieren**, z.B. beim Herleiten ökonomischer Zusammenhänge.

6.5. Partielle Ableitungen höherer Ordnung [Ro §7.6], [SH §11.2]

Ist die partielle Ableitung

$$(x, y) \mapsto f_x(x, y)$$

selbst partiell differenzierbar in (x_0, y_0) nach x bzw. y, so entstehen als *partielle Ableitungen 2. Ordnung von f an der Stelle (x_0, y_0)*

$$f_{xx}(x_0, y_0) \quad \text{bzw.} \quad f_{xy}(x_0, y_0).$$

Analog definiert man weitere partielle Ableitungen 2. Ordnung von f, nämlich die partiellen Ableitungen von f_y nach x bzw. y im Punkt (x_0, y_0), Symbole: $f_{yx}(x_0, y_0)$ bzw. $f_{yy}(x_0, y_0)$.

Ferner erhält man als *zweite partielle Ableitung(sfunktion)en*

$$(x, y) \mapsto f_{xx}(x, y), \ (x, y) \mapsto f_{xy}(x, y) \quad \text{etc.}$$

Weitere übliche Schreibweisen sind

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \text{ statt } f_{xx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ statt } f_{xy}, \quad \text{etc.}$$

f_{xy} und f_{yx} heissen *gemischte zweite* oder *Kreuz-* Ableitungen, sie fallen oft zusammen, wie der folgende Satz zeigt.

Satz von Schwarz Sei f auf einer δ-Umgebung $U_\delta(x_0, y_0)$ von (x_0, y_0) partiell differenzierbar nach x und y, und es existiere die gemischte zweite Ableitung

$$(x, y) \mapsto f_{xy}(x, y)$$

und sei stetig auf $U_\delta(x_0, y_0)$. Dann existiert auch $f_{yx}(x_0, y_0)$, und es gilt

$$f_{yx}(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0).$$

Beispiel Für $f(x, y) = e^{3x^2+2y^2}$ gilt

$$\begin{aligned}
f_x(x, y) &= 6\,xe^{3x^2+2y^2} \\
f_y(x, y) &= 4\,ye^{3x^2+2y^2} \\
f_{xx}(x, y) &= 6\,e^{3x^2+2y^2} + 36\,x^2e^{3x^2+2y^2} \\
f_{yy}(x, y) &= 4\,e^{3x^2+2y^2} + 16\,y^2e^{3x^2+2y^2} \\
f_{xy}(x, y) &= 24\,xye^{3x^2+2y^2} \quad (= fyx(x, y) \text{ nach Satz von Schwarz})
\end{aligned}$$

Eine elegante Übersicht über die zweiten partiellen Ableitungen gibt die *Hesse-Matrix* (auch: Hessesche Matrix) von f im Punkt (x_0, y_0):

$$\nabla^2 f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Das Symbol ∇ verwendet man auch gern (wie schon gesagt) zur Bezeichnung des Gradienten: $\nabla f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0),\ f_y(x_0, y_0))$.

Eine (2×2)-Matrix $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ heisst *symmetrisch*, falls $\alpha_{21} = \alpha_{12}$.

Unter den Voraussetzungen des Satzes von Schwarz gilt also:
Die Hesse-Matrix $\nabla^2 f(x_0, y_0)$ ist symmetrisch.

Definition Ist $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar nach allen Variablen und sind f_{xx}, f_{yy} und f_{xy} (und damit auch f_{yx}) stetig in $(x_0, y_0) \in D$ bzw. auf D heisst f *zweimal stetig differenzierbar* in $(x_0, y_0) \in D$ bzw. auf D.

Ist f zweimal stetig differenzierbar, überlegt man sich im Spezialfall

$$F(t) = f(x_0 + ta,\ y_0 + tb)$$

leicht die folgende Formel:

$$F''(0) = f_{xx}(x_0, y_0) \cdot a^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0) \cdot a \cdot b + f_{yy}(x_0, y_0) \cdot b^2.$$

Beweis (fakultativ):

Nach Kettenregel gilt an der Stelle $t = \theta$

$$F'(\theta) = f_x(x_0 + \theta a,\ y_0 + \theta b) \cdot a + f_y(x_0 + \theta a,\ y_0 + \theta b) \cdot b$$

$$\text{sowie} \quad F''(\theta) = \begin{array}{l} f_{xx}(x_0 + \theta a,\ y_0 + \theta b) \cdot a \cdot a \\ + f_{xy}(x_0 + \theta a,\ y_0 + \theta b) \cdot a \cdot b \\ + f_{yx}(x_0 + \theta a, y_0 + \theta b) \cdot b \cdot a \\ + f_{yy}(x_0 + \theta a,\ y_0 + \theta b) \cdot b \cdot b \end{array}$$

Nach dem Satz von Schwarz folgt für $\theta = 0$ die Behauptung.

Konvexität

[SH §13.1]

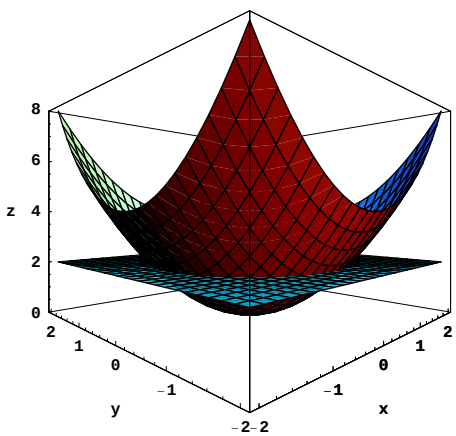
Definition. Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ eine konvexe Menge, d.h., mit zwei Punkten aus D liegt auch ihre Verbindungsstrecke in D.

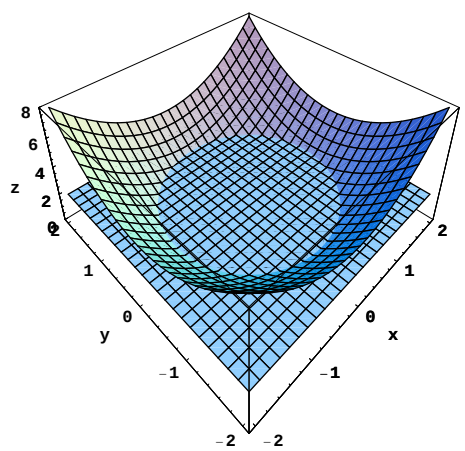
Die Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ heisst *konvex*, falls gilt:*

$$\underline{x} = (x_1, x_2),\ \underline{y} = (y_1, y_2) \in D \text{ und } \lambda \in (0,1)$$

$$\Rightarrow \quad f(\lambda \underline{x} + (1-\lambda)\underline{y}) \leq \lambda f(\underline{x}) + (1-\lambda) f(\underline{y}).$$

$g : D \to \mathbb{R}$ heisst *konkav*, falls $-g$ konvex ist.





Die konvexe Funktion

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

*Vektoren werden wieder durch Unterstreichen des Buchstaben hervorgehoben

Satz. Sei die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und sei D eine konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^2$. Dann gilt:

1. f ist konvex genau dann wenn für alle Punkte $\underline{x}, \underline{y} \in D$ die Ungleichung $f(\underline{y}) \geq f(\underline{x}) + (\underline{y} - \underline{x})^{\mathsf{T}}$ grad $f(\underline{x})$ gilt.
2. Ist f sogar zweimal stetig differenzierbar auf D, so ist f konvex genau dann, wenn **für jeden Punkt** $\underline{x} \in D$ die Hesse-Matrix $\nabla^2 f(\underline{x})$ positiv semidefinit ist. $\diamond$

Dabei heisst eine symmetrische Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$ *positiv semidefinit*, falls gilt

$$a \geq 0, \;\; c \geq 0, \;\; \det A := ac - b^2 \geq 0,$$

die Zahl $\det A$ heisst *Determinante von A.*

Beispiel. Die Funktion $f(x_1, x_2) = {x_1}^2 - 2x_1x_2 + {x_2}^2$ ist konvex, denn ihre Hesse-Matrix

$$\nabla^2 f(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{erfüllt Bedingung No. 2.}$$

6.6. Implizite Funktionen

[SH §§12.3-12.4], [Ro §7.7]

Einführungsbeispiel

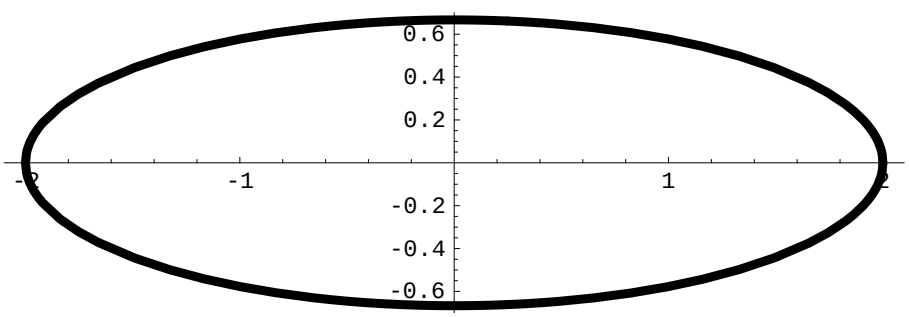
Die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung

$$x^2 + 9y^2 = 4$$

definiert zwar Relationen zwischen x und y, nämlich

$$\mathcal{R} := \{(x, y) \,|\, x^2 + 9y^2 = 4\} \quad \text{und} \quad \mathcal{R}^{-1} := \{(y, x) \,|\, x^2 + 9y^2 = 4\},$$

aber es ist weder eine Funktion $x \mapsto y = y(x)$ noch eine Funktion $y \mapsto x = x(y)$ definiert:



$\mathcal{R}$ definiert keine Funktion $x \mapsto y = y(x)$, denn z.B. $(0, -\frac{2}{3}), (0, \frac{2}{3}) \in \mathcal{R}$.

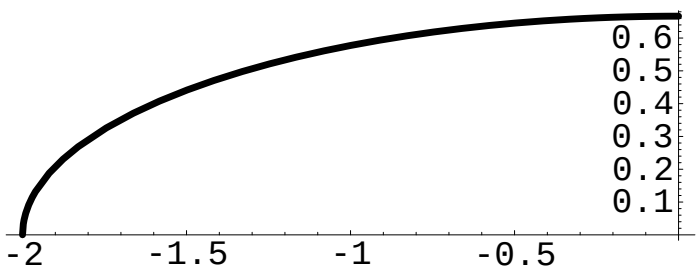
$\mathcal{R}^{-1}$ definiert keine Funktion $y \mapsto x = x(y)$, denn z.B. $(0, -2), (0, 2) \in \mathcal{R}^{-1}$.

Schränkt man aber die Menge der zulässigen Paare ein, z.B.

$$x^2 + 9y^2 = 4, \quad -2 \le x \le 0,\ 0 \le y \le \tfrac{2}{3},$$

dann ergeben sich *implizit* sowohl eine Funktion $x \mapsto y = y(x)$ als auch ihre Umkehrfunktion $y \mapsto x = x(y)$ aus

$$y^2 = \tfrac{4}{9} - \tfrac{1}{9}x^2 \quad \text{bzw.} \quad x^2 = 4 - 9y^2 :$$



Funktion $x \mapsto y = y(x)$:

$$y = \tfrac{2}{3}\sqrt{1 - \tfrac{1}{4}x^2},\ x \in [-2, 0]\,.$$

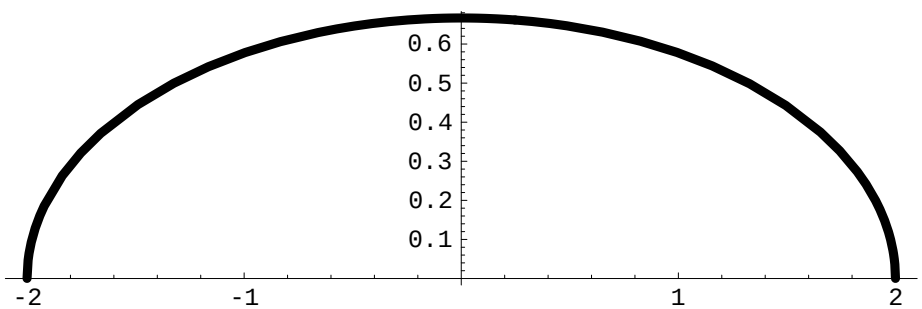
Funktion $y \mapsto x = x(y)$:

$$x = -2\sqrt{1 - \tfrac{9}{4}y^2},\ y \in [0, \tfrac{2}{3}]\,.$$

Schränkt man die Menge der zulässigen Paare anders ein, z.B.

$$x^2 + 9y^2 = 4, \quad -2 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq \tfrac{2}{3},$$

dann ergibt sich zwar implizit eine Funktion $x \mapsto y = y(x)$, aber keine Funktion $y \mapsto x = x(y)$:



Funktion $x \mapsto y = y(x)$:

$$y = \frac{2}{3}\sqrt{1 - \frac{1}{4}x^2},\ x \in [-2, 2]\,.$$

Funktion $y \mapsto x = x(y)$ nicht definiert, da zum Beispiel $y = 0 \mapsto \{-2, 2\}$.

Definition *Implizite Funktion* Sei $g : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $U \subseteq D$.

Die Funktion $y = h(x)$ heisst *implizit* gegeben durch die Gleichung

$$g(x, y) = 0$$

bezüglich $(x, y) \in U$, wenn für alle $(x, y) \in U$ gilt

$$g(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = h(x), \quad \text{d.h.}$$

a) $y = h(x)$ eingesetzt in $g(x, y)$ ergibt 0, und
b) die Gleichung $g(x, y) = 0$ lässt sich *eindeutig* nach y auflösen, falls man nur $(x, y) \in U$ zulässt.

Problem: Unter welchen Bedingungen repräsentiert die Gleichung $g(x, y) = 0$ **lokal**, d.h., in einer Umgebung U um einen gegebenen Punkt (x_0, y_0), eine differenzierbare (implizite) Funktion $x \mapsto y = h(x)$ und wie berechnet sich $h'(x)$? $\Rightarrow$ Satz über implizite Funktionen

Satz über implizite Funktionen: [Ro Satz §7.4, vereinfacht]

Voraussetzungen:

1. g sei auf einer Umgebung D von (x_0, y_0) partiell differenzierbar nach x und y, und die Funktionen
$$(x,y) \mapsto g_x(x,y), \quad (x,y) \mapsto g_y(x,y)$$
seien auf D stetig,
2. $g(x_0, y_0) = 0$,
3. $g_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Behauptung:

Es gibt Zahlen $\delta, \varepsilon > 0$ mit $U_\delta(x_0) \times U_\varepsilon(y_0) \subseteq D$, so dass gilt:

(1) Die Gleichung $g(x,y) = 0$ hat für jedes $x \in U_\delta(x_0)$ genau eine Lösung $y = h(x) \in U_\varepsilon(y_0)$, wobei $y_0 = h(x_0)$.

(2) h ist stetig differenzierbar auf $U_\delta(x_0)$, und es gilt
$$h'(x) = -\frac{g_x(x, h(x))}{g_y(x, h(x))}, \; x \in U_\delta(x_0)\,.$$
Speziell gilt
$$h'(x_0) = -\frac{g_x(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)}\,.$$

Folgerung: Ist g zweimal stetig differenzierbar auf D und sind die Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen erfüllt, so ist auch die implizite Funktion h zweimal stetig differenzierbar, wobei sich $h''(x)$ aus der in (2) gegebenen Formel für $h'(x)$ berechnet.

Aufgabe: Wende im Einführungsbeispiel den Satz über implizite Funktionen bezüglich

$$(x_0, y_0) = (-1, \tfrac{1}{\sqrt{3}})$$

an und berechne $h'(x_0)$ und $h''(x_0)$.

Lösung: Sei $g(x,y) := x^2 + 9y^2 - 4$. Überprüfen Sie selbständig, ob die Voraussetzungen der Folgerung erfüllt sind. Ferner gilt

$$g_x(x,y) = 2x, \;\; g_y(x,y) = 18y, \quad \text{also } h'(x) = -\frac{g_x(x,h(x))}{g_y(x,h(x))} = -\frac{x}{9h(x)},$$

also $h'(x_0) = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ wegen $(x_0, h(x_0)) = (-1, \frac{1}{\sqrt{3}})$. Darüber hinaus gilt

$$h''(x) = -\frac{1}{9}\left[\frac{1}{h(x)} - \frac{x\,h'(x)}{(h(x))^2}\right],$$

man rechnet aus, dass $h''(x_0) = -\frac{4}{9\sqrt{3}}$. Das gleiche Resultat erhält man durch Ableiten der Funktion $x \mapsto \frac{2}{3}\sqrt{1 - \frac{1}{4}x^2}$, vgl. Seite 252.

Anwendung: Grenzrate der Substitution

Man betrachte mit $D := \{(x,y)|x > 0,\, y > 0\}$, $0 < \alpha < 1$ und $c > 0$ die Cobb-Douglas-Funktion

$$(x,y) \mapsto cx^{\alpha}y^{1-\alpha},\ \ (x,y) \in D,$$

sowie die Gleichung der Isoquante zum Niveau γ,

$$g(x,y) := cx^{\alpha}y^{1-\alpha} - \gamma = 0.$$

Die Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen sind offensichtlich in jedem Punkt aus D erfüllt. Die Existenz der Auflösung $y = h(x)$ folgt damit. Es gilt

$$g_x(x,y) = \alpha c\ (\tfrac{y}{x})^{1-\alpha}, \quad g_y(x,y) = (1-\alpha)c\ (\tfrac{x}{y})^{\alpha}\,.$$

Bemerkung: Für $x \equiv L$, $y \equiv K$, $g(x,y) \equiv X(L,K)$ (Ertrag) sind die partiellen Ableitungen die Grenzerträge der Arbeit L bzw. des Kapitals K. Für die Cobb-Douglas-Funktion g sind bei $y = y_0$ bzw. $x = x_0$ konstant die Funktionen $x \mapsto g_x(x,y_0)$ und $y \mapsto g_y(x_0,y)$ monoton fallend ("Gesetz des abnehmenden Grenzertrages", mathematisch: Konkavität).

Formel für $h'(x)$:

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= -\frac{g_x(x,y)}{g_y(x,y)} && \begin{array}{l} \longleftarrow \text{ Grenzertrag zum 1. Faktor} \\ \hline \longleftarrow \text{ Grenzertrag zum 2. Faktor} \end{array} \\
&= -\frac{\alpha c}{(1-\alpha)c}\,\frac{(\frac{y}{x})^{1-\alpha}}{\left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha}} \\
&= -\frac{\alpha}{1-\alpha}\,\left(\frac{y}{x}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{y}{x}\right)^{\alpha} \\
&= -\frac{\alpha}{1-\alpha}\,\frac{y}{x}
\end{aligned}
$$

In der Ökonomie heisst $h'(x)$ (bzw. $-h'(x)$) *Grenzrate der Substitution* von y zu x, $h'(x)$ wird daher auch oft $\frac{dy(x)}{dx}$ geschrieben.

Die Grenzrate der Substitution ist - wie wir ausgerechnet haben - bis auf das Vorzeichen umgekehrt proportional zum Verhältnis der Grenzerträge von x und y.

6.7. Relative Extrema ohne Nebenbedingungen [SH §13], [Ro §7.8]

Definition Eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ hat im Punkt $(x_0,\ y_0) \in D$ ein *relatives Maximum*, wenn es eine δ-Umgebung $U_\delta(x_0,\ y_0) \subseteq D$ gibt, so dass gilt:

$$f(x,y) \leq f(x_0,\ y_0) \qquad \forall (x,y) \in U_\delta(x_0, y_0).$$

$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ hat im Punkt $(x_0,\ y_0) \in D$ ein *relatives Minimum*, wenn es eine δ-Umgebung $U_\delta(x_0,\ y_0) \subseteq D$ gibt, so dass gilt:

$$f(x,y) \geq f(x_0,\ y_0) \qquad \forall (x,y) \in U_\delta(x_0, y_0).$$

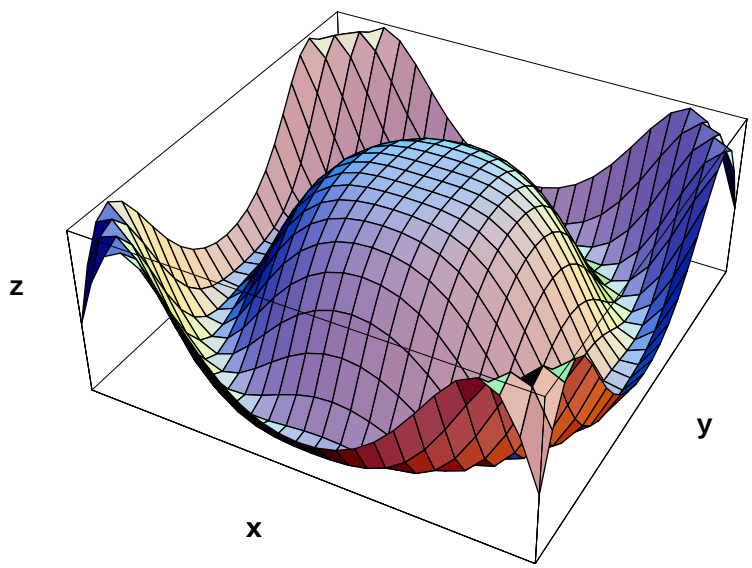
Der Sammelbegriff ist wieder *relatives Extremum*. Statt der o.a. Bezeichnung "im Punkt" verwendet man auch "an der Stelle".

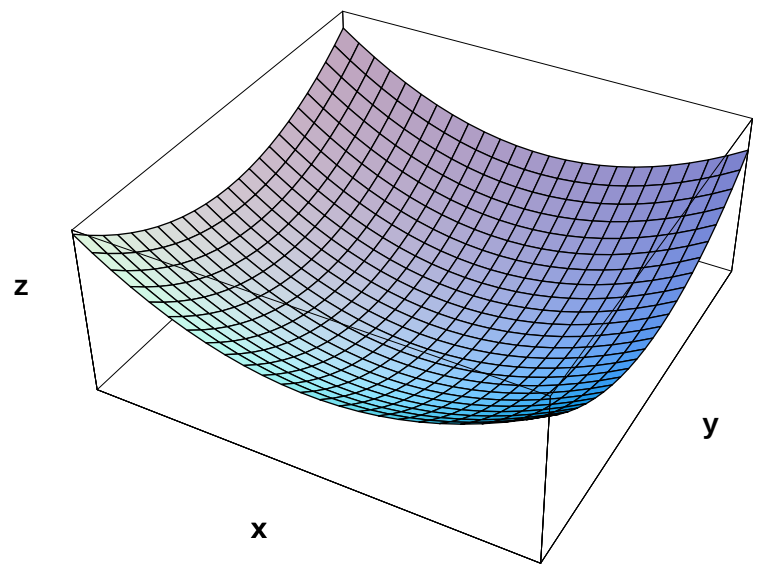
Ökonomische Anwendungen sind u.a. wieder Probleme der Gewinnmaximierung, der Kostenminimierung etc..

Nach Definition gilt: Wenn f in (x_0, y_0) ein relatives Maximum hat, so haben auch die Funktionen

$$f_1(x) = f(x, y_0) \quad \text{und} \quad f_2(y) = f(x_0, y)$$

ein relatives Maximum. Die analoge Aussage gilt für relative Minima. Vgl. folgende Grafik:





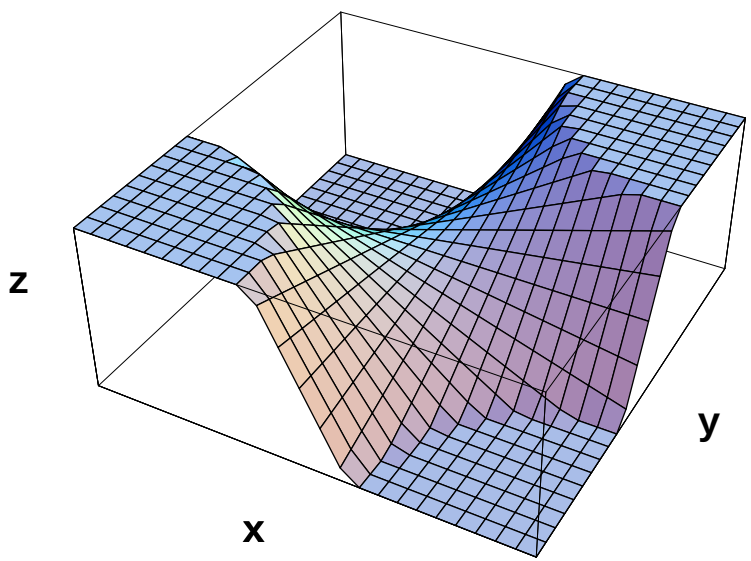
Satz: Notwendige Optimalitätsbedingungen

Wenn eine nach beiden Variablen partiell differenzierbare Funktion $(x, y) \mapsto f(x, y)$ in (x_0, y_0) ein relatives Extremum hat, so gilt

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \quad \textbf{und} \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

Ein Punkt (x_0, y_0), der diesen beiden Bedingungen genügt, heisst *kritischer Punkt* oder *stationärer Punkt* der Funktion f.

Ein kritischer Punkt der Funktion f, in dem kein relatives Extremum vorliegt, heisst *Sattelpunkt*, siehe die folgende Grafik.



gph f zu
$f(x, y) = xy$

Definition: Determinante einer Matrix

Gegeben sei eine (2×2) - Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \qquad (\alpha_{ij} \in \mathbb{R},\ i = 1, 2)$$

Dann heisst die reelle Zahl

$$\det A = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$$

Determinante von A.

Statt "$\det A$" verwendet man auch die senkrechten Striche:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$$

Falls $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar ist, berechnet sich die Determinante der Hesse-Matrix $A = \nabla^2 f(x_0, y_0)$ so:

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 .$$

Satz: Hinreichende Optimalitätsbedingungen 2. Ordnung

f habe auf einer Umgebung von (x_0, y_0) stetige partielle Ableitungen 1. und 2. Ordnung. Dann gilt:

1. Falls die notwendigen Bedingungen 1. Ordnung, d.h.,

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$$

erfüllt sind sowie

$$\mu := \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0$$

gilt, so hat f an der Stelle (x_0, y_0) ein relatives Extremum.
Falls überdies

$f_{xx}(x_0,\ y_0) > 0$ gilt, so ist das ein relatives Minimum,
$f_{xx}(x_0,\ y_0) < 0$ gilt, so ist das ein relatives Maximum.

Hinweis: Der Fall $f_{xx}(x_0, y_0) = 0$ kann wegen $\mu > 0$ nicht auftreten. Warum? Bitte selbst überlegen!

2. Falls die notwendigen Bedingungen 1. Ordnung, d.h.,

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$$

erfüllt sind sowie

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} < 0$$

gilt, so hat f an der Stelle (x_0, y_0) einen Sattelpunkt (also **kein** relatives Extremum).

3. Im Falle

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0$$

kann zunächst nichts zur Optimalität eines kritischen Punktes (x_0, y_0) ausgesagt werden.

Weiter unten wird die hinreichende Optimalitätsbedingung begründet.

Beispiel HB1 $f(x,y) = x^2 + 4y^2$

$$f_x(x,y) = 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$
$$f_y(x,y) = 8y = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

Einziger kritischer Punkt ist $(x_0, y_0) = (0,0)$. Ferner gilt

$$f_{xx}(0,0) \cdot f_{yy}(0,0) - (f_{xy}(0,0))^2 = 2 \cdot 8 - 0 > 0,$$

wobei $f_{xx}(0,0) > 0$ ist.

Folglich ist $(0,0)$ Stelle eines relativen Minimums.

Beispiel HB2 $f(x,y) = x \cdot y$

$$f_x(x,y) = y = 0 \Longleftrightarrow y = 0$$
$$f_y(x,y) = x = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

Einziger kritischer Punkt ist $(x_0, y_0) = (0,0)$. Ferner gilt

$$f_{xx}(0,0) \cdot f_{yy}(0,0) - (f_{xy}(0,0))^2 = 0 \cdot 0 - 1 < 0,$$

$\Rightarrow (0,0)$ ist Sattelpunkt.

Beispiel HB3 $f(x,y) = x^2 + y^4$

Offenbar ist $(0,0)$ ein (globaler) Minimalpunkt von f, denn

$$x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad y^4 \geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

und somit

$$f(x,y) \geq 0 = f(0,0) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

In der Tat gilt das notwendige Kriterium

$$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0.$$

Das hinreichende Optimalitätskriterium ist aber **nicht hilfreich**, da

$$f_{xx}(0,0) \cdot f_{yy}(0,0) - (f_{xy}(0,0))^2 = 0.$$

Beispiel HB4 $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 - xy$

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= x^2 - y = 0 \Leftrightarrow y = x^2 && (i) \\ f_y(x,y) &= y^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = y^2 && (ii) \end{aligned}$$

(i) eingesetzt in (ii) ergibt

$$x = x^4 \qquad (iii);$$

(iii) hat offenbar 2 Lösungen:

$$x = 0 \quad \textit{und} \quad (\text{aus } 1 = x^3 \text{ für } x \neq 0)\ x = 1$$

Folglich sind $(0,0)$ und $(1,1)$ die einzigen kritischen Punkte. Ferner ist

$$f_{xx}(x,y) = 2x, \quad f_{xy}(x,y) = -1, \quad f_{yy}(x,y) = 2y.$$

Somit folgt

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{xy}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

$$\Rightarrow (0,0) \text{ Sattelpunkt.}$$

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(1,1) & f_{xy}(1,1) \\ f_{xy}(1,1) & f_{yy}(1,1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

$$\text{und } f_{xx}(1,1) = 2 > 0$$

$$\Rightarrow (1,1) \text{ Stelle eines relativen Minimums.}$$

Begründung der hinreichenden Bedingungen 2. Ordnung

RELATIVE MINIMA

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar auf einer Umgebung von $(x_0, y_0) \in D$, und es gelte

(i) $\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = (0, 0)$, d.h., $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$.

(ii) $f_{xx}(x_0, y_0)\ u^2 + 2 f_{xy}(x_0, y_0)\ uv + f_{yy}(x_0, y_0)\ v^2 > 0$
$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Dann hat f in (x_0, y_0) ein relatives Minimum.

Bemerkung (positive Definitheit): Man kann zeigen, dass (ii) äquivalent ist zur Voraussetzung

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0$$

und $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$,

damit haben wir dieselbe Aussage wie im o.a. Satz über die hinreichenden Bedingungen 2. Ordnung. Man sagt, die Hesse-Matrix $\nabla^2 f(x_0, y_0)$ ist *positiv definit*.

Beweis: Für $F(t) := f(x_0 + tu, y_0 + tv)$ mit $(x_0 + tu, y_0 + tv) \in D$ gilt

$$F'(t) = f_x(x_0 + tu, y_0 + tv) \cdot u + f_y(x_0 + tu, y_0 + tv) \cdot v.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad F''(t) &= f_{xx}(x_0 + tu, y_0 + tv) \cdot u^2 \\ &\quad + 2 f_{xy}(x_0 + tu, y_0 + tv) \cdot u \cdot v \\ &\quad + f_{yy}(x_0 + tu, y_0 + tv) \cdot v^2. \end{aligned}$$

Für $(u, v) \neq (0, 0)$ folgt $F''(0) > 0$ nach Voraussetzung (ii), die Stetigkeit von $f_{xx},\ f_{xy},\ f_{yy}$ in (x_0, y_0) impliziert dann

$$F''(t) > 0 \quad \forall t \in [0, 1],$$

falls $|u|$ und $|v|$ nahe 0 sind.

Wählen wir nun (x, y) "nahe" (x_0, y_0) beliebig mit $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ dann sind die Werte

$$u := x - x_0,\ v := y - y_0$$

betragsmässig klein.

Nach (i) ist $F'(0) = 0$. Mit dem Satz von Taylor folgt $\exists \theta \in (0,1)$:

$$\begin{aligned} f(x,y) = F(1) &= F(0) + \underbrace{F'(0)}_{=0} \cdot 1 + \frac{1}{2} \underbrace{F''(\theta)}_{>0} \cdot 1 \\ &> F(0) \\ &= f(x_0, y_0), \end{aligned}$$

d.h., f hat im Punkt (x_0, y_0) ein relatives Minimum (denn (x,y) war nahe (x_0, y_0) gewählt).

Beachten wir noch die Bemerkung zur "positiven Definitheit", so haben wir gerade das hinreichende Kriterium für relative Minima gezeigt, vgl. Aussage 1 im Satz.

Das hinreichende Kriterium für relative Maxima beweist man analog, dazu betrachtet man folgende Modifikation:

RELATIVE MAXIMA

Seien f und (x_0, y_0) wie oben und gelte

(i) $\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = (0,0)$, d.h., $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$.

(ii) $f_{xx}(x_0, y_0)\ u^2 + 2 f_{xy}(x_0, y_0)\ uv + f_{yy}(x_0, y_0)\ v^2 < 0$
$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Dann hat f in (x_0, y_0) ein relatives Maximum.

Bemerkung (negative Definitheit): Man kann zeigen, dass (ii) äquivalent ist zur Voraussetzung

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0$$

und $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$,

vgl. wieder Aussage 1 im Satz über die hinreichenden Bedingungen 2. Ordnung.

Man sagt in diesem Falle, die Hesse-Matrix $\nabla^2 f(x_0, y_0)$ ist *negativ definit*.

Bemerkungen

- Der obige Beweis zeigt: die hinreichenden Bedingungen 2. Ordnung liefern sogar ein striktes relatives Minimum bzw. Maximum !

- Die Definitheitskriterien sind eigentlich Aussagen über die Koeffizientenmatrizen sogenannter *quadratischer Formen*

$$Q(u,v) := au^2 + 2buv + cv^2, \ (u,v) \in \mathbb{R}^2,$$

bei gegebenen Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$ und lauten so:

1. $Q(u,v) > 0 \ \forall (u,v) \neq (0,0) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} > 0$ und $a > 0$.
2. $Q(u,v) < 0 \ \forall (u,v) \neq (0,0) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} > 0$ und $a < 0$.
3. $Q(u,v) \geq 0 \ \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \geq 0$ und $a, c \geq 0$.

1. $\equiv$ *positiv definit*, 2. $\equiv$ *negativ definit*, 3. $\equiv$ *positiv semidefinit*.

Übungsaufgabe:

Man zeige jeweils mit Hilfe der Definition von Determinanten die folgenden Aussagen.

1. kann auch so geschrieben werden:

$$Q(u,v) > 0 \ \forall (u,v) \neq (0,0) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} > 0 \ \text{ und } a > 0 \text{ und } c > 0\,.$$

Analog kann 2. so geschrieben werden:

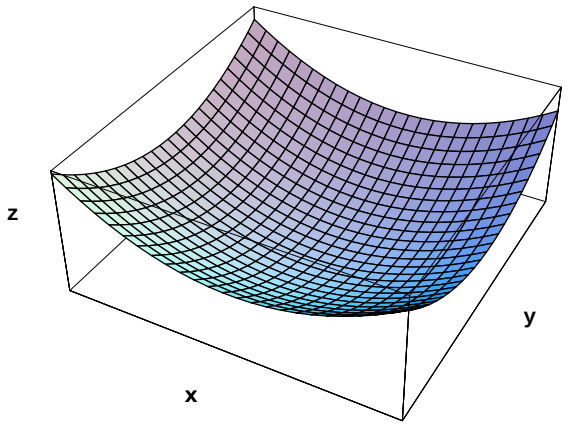
$$Q(u,v) < 0 \ \forall (u,v) \neq (0,0) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} > 0 \ \text{ und } a < 0 \text{ und } c < 0\,.$$

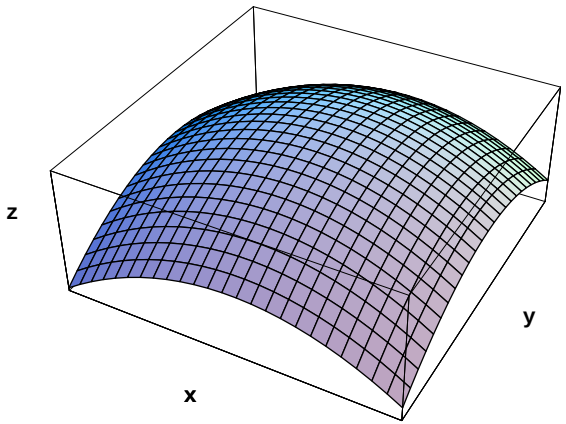
Dagegen reicht es in 3. nicht aus, nur $a \geq 0$ oder $c \geq 0$ zusätzlich zur Nichtnegativität der Determinante $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$ zu fordern.

Satz: Optimalitätskriterien für konvexe/konkave Funktionen

Seien $D \subset \mathbb{R}^2$ eine offene, konvexe Menge und $f : D \to \mathbb{R}$ eine konvexe, stetig differenzierbare Funktion (die Existenz 2. Ableitungen wird nicht gefordert). Dann gilt für $\underline{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$:

1. f besitzt im Punkt $\underline{x}^0 \in D$ ein *globales Minimum* genau dann, wenn $\operatorname{grad} f(\underline{x}^0) = \underline{o}$ gilt.*
2. Die konkave Funktion $g = -f$ besitzt im Punkt $\underline{x}^0 \in D$ ein *globales Maximum* genau dann, wenn $\operatorname{grad} g(\underline{x}^0) = \underline{o}$ gilt.





*d.h., wenn die Tangentialebene $\mathcal{T}$ parallel zur (x_1, x_2)-Ebene liegt, was bedeutet: $\mathcal{T} = \{(x_1, x_2, z) \,|\, z = f(x_1^0, x_2^0)\}$.

6.8. Lokale Extrema unter Nebenbedingungen

[Ro §7.10], [SH §§14.1-14.4]

6.8.1. Einführungsbeispiele

Problem A: Nutzenmaximierung eines Konsumenten

Gesucht ist ein Konsumplan (c_1, c_2) mit $c_1 \geq 0, c_2 \geq 0$, so dass der Nutzen

$$u(c_1, c_2) = \ln(c_1 + 1) + 3\ln(c_2 + 3)$$

unter der Nebenbedingung

$$2c_1 + 3c_2 - 21 = 0$$

maximal wird.

Problem B: Kostenminimierung eines Produzenten

Gesucht ist ein Produktionsplan (K, L) mit $K > 0,\ L > 0$, so dass die Kosten

$$v(K, L) = 2K + 96L$$

unter der Nebenbedingung

$$10\, K^{0.25}\, L^{0.75} - 20 = 0$$

minimal werden.

Allgemeine Extremalaufgaben unter Nebenbedingungen

Gesucht sind lokale Minima oder Maxima der Optimierungsaufgabe

$$(P) \qquad \min f(x,y) \ [\text{oder} \max f(x,y)] \qquad \text{bezüglich} \quad g(x,y) = 0\,.$$

Dabei heisst mit

$$M := \{(x,y) \mid g(x,y) = 0\} \quad \text{und} \quad D_f = \text{Definitionsbereich von } f$$

ein Punkt $(x_0, y_0) \in M$ *lokaler Minimalpunkt* der Aufgabe (P), wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $U_\varepsilon(x_0, y_0) \subseteq D_f$ und

$$f(x_0, y_0) \leq f(x,y) \text{ für alle } (x,y) \in M \cap U_\varepsilon(x_0, y_0)\,.$$

Der Wert $f(x_0, y_0)$ ist dann ein *lokales Minimum von f bezüglich M*.

Analog sind *lokale Maxima(lpunkte)* definiert.

In der Aufgabe

$$(P) \qquad \min / \max f(x,y) \qquad \text{bezüglich} \quad g(x,y) = 0$$

heisst f *Zielfunktion* und $g(x,y) = 0$ *Nebenbedingung* oder *Restriktion* in Gleichungsform.

6.8.2. Reduktionsmethode (auch *Substitutionsmethode* genannt)

Diese Methode funktioniert nur unter einer wichtigen Voraussetzung: Die Gleichung

$$g(x,y) = 0$$

lässt sich für $(x,y) \in D$, D offene Teilmenge des Definitionsbereichs der Zielfunktion f, **eindeutig nach einer der Variablen auflösen**, z.B.

$$y = h(x) \quad \forall (x,y) \in D,$$

d.h., man muss diese implizite Funktion ausrechnen können.

Dabei heisst D *offen*, wenn zu jedem $(x,y) \in D$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $U_\delta(x,y) \subset D$ gilt.

Idee der Reduktionsmethode

Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und D eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$. Wir betrachten die Aufgabe <u>in 2 Variablen</u> *mit Nebenbedingung*

$$(P) \qquad f(x,y) \to \min \text{ bezgl. } g(x,y) = 0,$$

wobei bezüglich D durch $g(x,y) = 0$ eine implizite Funktion

$$y = h(x), \ (x,y) \in D,$$

definiert sei und als bekannt vorausgesetzt wird (oder leicht ausgerechnet werden kann).

Nun löse man die Aufgabe <u>in 1 Variablen</u> *ohne Nebenbedingungen* *

$$(\widetilde{P}) \qquad f(x,h(x)) \to \min .$$

Es gilt dann:

$\widehat{x}$ ist lokale Minimalstelle von $(\widetilde{P})$
$\Leftrightarrow$ $(\widehat{x}, h(\widehat{x}))$ ist lokale Minimalstelle von (P).

*Optimierung *ohne* Nebenbedingungen nennen wir auch *freie* Optimierung

Die analogen Aussagen (ebenso in Bezug auf die folgenden Bemerkungen) gelten für Maximum-Aufgaben.

Bemerkungen:

1. Eine Aufgabe vom Typ "Problem A" ist wegen der linearen Nebenbedingung geeignet, mit der Reduktionsmethode gelöst zu werden.

2. Liegen alle Lösungen der Gleichung $g(x, y) = 0$ in D und ist $y = h(x)$ eine durch $g(x, y) = 0$ definierte implizite Funktion, so gilt auch

$$\begin{aligned} &\widehat{x} \text{ ist globale Minimalstelle von } (\widetilde{P}) \\ \Leftrightarrow\ &(\widehat{x}, h(\widehat{x})) \text{ ist globale Minimalstelle von } (P). \end{aligned}$$

Typisch ist diese Situation, wenn die implizite Funktion $y = h(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

Beispiel: Wir lösen die Aufgabe $xy \to \max$ bezgl. $x + 2y = 4$.

a. Auflösen, z.B. nach y: $\quad y = h(x) := 2 - \dfrac{1}{2}x.$

b. Einsetzen in die Zielfunktion:

$$(*) \qquad \varphi(x) := 2x - \tfrac{1}{2}x^2 \ \to \max$$

Um dieses freie Optimierungsproblem zu lösen, bestimmen wir

$$\varphi'(x) = 2 - x, \quad \varphi''(x) = -1.$$

Folglich ist φ konkav. Der Punkt $\widehat{x} = 2$ genügt der Bedingung

$$\varphi'(\widehat{x}) = 2 - \widehat{x} = 0$$

und ist somit globale (auch lokale) Maximalstelle der Aufgabe $(*)$.

c. Bestimmung von $\widehat{y} = h(\widehat{x})$: $\quad \widehat{y} = 2 - \frac{1}{2}\,\widehat{x} = 1$, das heisst, dass der <u>Punkt $(\widehat{x}, \widehat{y}) = (2, 1)$ die einzige Stelle</u> ist, an der die Funktion $f(x, y) = xy$ ihr globales (speziell auch ein lokales) Maximum *unter der Nebenbedingung* $x + 2y = 4$ annimmt.

6.8.3. Methode von Lagrange

Es handelt sich um eine

Methode zur Berechnung **möglicher** Stellen eines lokalen Extremums

der Funktion

$$f(x,y) \quad \text{unter der Nebenbedingung} \quad g(x,y) = 0.$$

Berechnet werden *stationäre Punkte* (x_0, y_0), d.h. Punkte, die

den notwendigen Optimalitätsbedingungen von Lagrange

genügen. Im Gegensatz zur Reduktionsmethode muss nur die **Existenz** einer durch $g(x,y) = 0$ gegebenen impliziten Funktion nahe (x_0, y_0) vorausgesetzt werden, man muss sie <u>nicht</u> kennen!

Die Überprüfung, ob oder welcher Typ eines lokalen Extremums vorliegt, ist eine Extraaufgabe und oft schwierig!!

In der Praxis hat man häufig Zusatzinformationen, mit denen diese Extraaufgabe gelöst werden kann, vgl. die Lösung der Probleme A und B weiter unten sowie §6.8.4.

Theoretische Herleitung der Lagrange-Bedingungen

Wir setzen voraus, dass

- f auf einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist,
- (x_0, y_0) lokaler Extremalpunkt für f unter $g(x, y) = 0$ ist und
- ohne Beschränkung der Allgemeinheit* gilt
$$g_y(x_0, y_0) \neq 0\,,$$
das heisst, nach dem Satz über implizite Funktionen ist in einer Umgebung $U_\varepsilon(x^0) \times U_\delta(y^0) \subset D$ von (x_0, y_0) durch $g(x, y) = 0$ eine implizite Funktion definiert, also
$$g(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; y = h(x) \quad \forall (x, y) \in U_\varepsilon(x^0) \times U_\delta(y^0).$$
Speziell ist $y_0 = h(x_0)$.

Folglich ist x_0 **relative** Extremalstelle† der Funktion einer Variabler
$$F(x) := f(x, h(x)),\; x \in U_\varepsilon(x^0).$$

*analog liesse sich auch der Fall "x ist lokal eine Funktion von y" behandeln

†man spricht deshalb auch bei (x_0, y_0) oft von einem *relativen* Extremalpunkt.

Folglich ist

$$F'(x_0) = 0.$$

Die Kettenregel bezüglich $F(x) := f(x, h(x))$ ergibt

$$F'(x_0) = f_x(x_0, y_0) \cdot 1 + f_y(x_0, y_0) \cdot h'(x_0).$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen folgt dann

$$h'(x_0) = -\frac{g_x(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)}.$$

Das heisst

$$F'(x_0) = 0 \;\Leftrightarrow\; f_x(x_0, y_0) - \frac{f_y(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)}\, g_x(x_0, y_0) = 0.$$

Man setze $\lambda := \frac{f_y(x_0,y_0)}{g_y(x_0,y_0)}$, d.h.,

$$F'(x_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} f_x(x_0, y_0) - \lambda g_x(x_0, y_0) = 0\,, \\ f_y(x_0, y_0) - \lambda g_y(x_0, y_0) = 0\,. \end{array}$$

Damit haben wir hergeleitet den

Satz von Lagrange [Ro Satz 7.7 modifiziert], [SH Thm. 14.3.1]
Notwendige Optimalitätsbedingung bei einer Gleichungsrestriktion

Voraussetzungen:

- f und g seien auf einer Umgebung von $(x_0, y_0) \neq 0$ stetig partiell differenzierbar nach x und y,
- es sei $g_x(x_0, y_0) \neq 0$ oder $g_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Dann gilt:

Wenn f in (x_0, y_0) ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ hat, so existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ derart*, dass

$$\begin{array}{rrcl} (i) & f_x(x_0, y_0) - \lambda\ g_x(x_0, y_0) & = & 0 \\ (ii) & f_y(x_0, y_0) - \lambda\ g_y(x_0, y_0) & = & 0 \\ (iii) & g(x_0, y_0) & = & 0 \end{array}$$

Beweis: Er wurde soeben geführt für den Fall $g_y(x_0, y_0) \neq 0$; der Fall $g_x(x_0, y_0) \neq 0$ ginge analog.

*unter unseren Voraussetzungen ist $\lambda \neq 0$ nicht zwingend!

Tip: Die Lagrange-Bedingungen (i), (ii), (iii) lassen sich auch leicht merken über die *Lagrangefunktion*

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y),$$

dabei heisst $\lambda \in \mathbb{R}$ *Lagrange-Multiplikator*. Die Lagrange-Bedingungen lassen sich dann unter den Voraussetzungen des Satzes von Lagrange so interpretieren:

Wenn (x_0, y_0) lokaler Extremalpunkt ist, so existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass (x_0, y_0, λ) *stationärer Punkt der Lagrangefunktion* ist, d.h., es gilt $\operatorname{grad} L(x_0, y_0, \lambda) = 0$, ausführlich:

$$\begin{array}{rrcll} (i) & L_x(x_0, y_0, \lambda) & = & 0 & (= f_x(x_0, y_0) - \lambda\ g_x(x_0, y_0)) \\ (ii) & L_y(x_0, y_0, \lambda) & = & 0 & (= f_y(x_0, y_0) - \lambda\ g_y(x_0, y_0)) \\ (iii) & L_\lambda(x_0, y_0, \lambda) & = & 0 & (= g(x_0, y_0)) \end{array}$$

Darüber ergeben sich auch *ökonomische* Interpretationen wie "Grenzertrag der Kosten" oder "Schattenpreis" im jeweiligen Kontext, vgl. [SH §14.2] oder [Ro §7.10].

Lösung des Einführungsbeispiels "Problem A"

In $x-y-$Koordinaten ($x \geq 0$, $y \geq 0$ wird nachträglich überprüft):

$$\ln(x+1) + 3\ln(y+3) \to \max \qquad \text{NB: } 2x + 3y - 21 = 0.$$

Lagrangefunktion: $L(x, y, \lambda) = \ln(x+1) + 3\ln(y+3) - \lambda(2x+3y-21)$.

Notwendige Bedingungen:

$$\begin{array}{rrcrcl} (i) & L_x & = & \frac{1}{x+1} - 2\lambda & = & 0 \\ (ii) & L_y & = & \frac{3}{y+3} - 3\lambda & = & 0 \\ (iii) & L_\lambda & = & 2x + 3y - 21 & = & 0 \end{array}$$

Erweitern liefert

$$\begin{array}{rcl} (i) & \Leftrightarrow & \frac{3}{x+1} - 6\lambda = 0 \\ (ii) & \Leftrightarrow & \frac{6}{y+3} - 6\lambda = 0 \end{array}$$

Folglich

$$\frac{3}{x+1} = \frac{6}{y+3}, \quad \text{d.h.,} \quad 3y + 9 = 6x + 6 \quad \Leftrightarrow \quad 6x - 3y = 3.$$

Nehmen (iii) hinzu. Zu lösen ist das System

$$2x + 3y = 21, \quad 6x - 3y = 3.$$

Addition liefert $8x = 24$, somit $x = 3$, $y = 5$.

Folglich sind die Gleichungen (i)–(iii) nur erfüllt durch

$$x = 3, \quad y = 5, \quad \lambda = \tfrac{1}{8},$$

d.h., $(x_0, y_0) = (3, 5)$ ist die einzige <u>mögliche</u> Extremalstelle, die Vorzeichenbeschränkungen sind auch erfüllt.

Da die Lagrange-Methode nur notwendige Optimalitätsbedingungen liefert, weiss man noch nicht, ob ein lokales oder globales Maximum vorliegt. Also dürfen wir **jetzt** noch nicht antworten: "$(3, 5)$ ist lokaler Maximalpunkt".

Hinweis: Die Aufgabe genügt (nachprüfen!) dem hinreichenden *Kriterium unter linearen Nebenbedingungen* in §6.8.4, $(3, 5)$ ist also sogar *globaler Maximalpunkt*. Im Beispiel sieht man das aber auch direkt mit der *Reduktionsmethode*:

$$2x + 3y - 21 = 0 \;\Leftrightarrow\; y = 7 - \tfrac{2}{3}x \qquad (!)$$

führt auf eine freie 1-dimensionale Aufgabe mit konkaver Zielfunktion (nachprüfen!):

$$\varphi(x) = \ln(x + 1) + 3\ln(10 - (2/3)x) \;\rightarrow\; \max_x .$$

Globaler Maximalpunkt ist $x = 3$ (nachprüfen!), $y = 5$ folgt aus (!).

Lösung des Einführungsbeispiels "Problem B"

In $x-y-$Koordinaten ($x > 0$, $y > 0$ wird nachträglich überprüft):

$$2x + 96y \to \min \quad \text{NB: } 10x^{0.25}y^{0.75} - 20 = 0.$$

Zur Vereinfachung überführen wir das in die äquivalente Aufgabe*:

$$x + 48y \to \min \quad \text{NB: } x^{0.25}y^{0.75} - 2 = 0.$$

Lagrangefunktion: $L(x, y, \lambda) = x + 48y - \lambda(x^{0.25}y^{0.75} - 2)$.

Notwendige Bedingungen:

$$\begin{array}{rrcrcl} (i) & L_x & = & 1 - 0.25\lambda\left(\frac{y}{x}\right)^{0.75} & = & 0 \\ (ii) & L_y & = & 48 - 0.75\lambda\left(\frac{x}{y}\right)^{0.25} & = & 0 \\ (iii) & L_\lambda & = & x^{0.25}y^{0.75} - 2 & = & 0 \end{array}$$

Division von (ii) durch (i) ist erlaubt (warum??) und liefert

$$48 = 3\left(\frac{x}{y}\right)^{0.25+0.75} = 3\,\frac{x}{y} \qquad \Leftrightarrow \quad 16y = x.$$

Einsetzen in (iii) ergibt eine einzige *mögliche* Extremalstelle

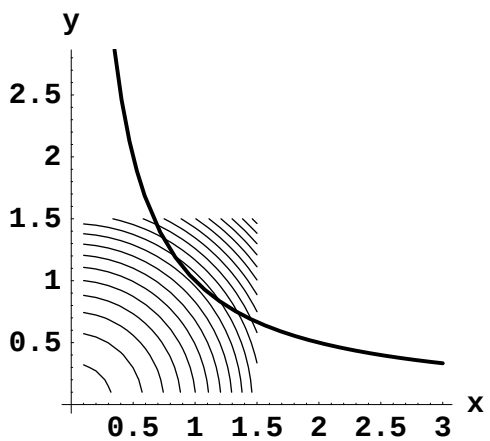
$$2 = (16y)^{0.25}y^{0.75} = 2y, \quad \text{d.h.,} \quad \underline{\underline{y = 1,\ x = 16}}.$$

*nur der Optimalwert muss umgerechnet werden

Hinweis zum Problem B: Bisher wurde nur eine stationäre Lösung der Aufgabe berechnet. Wenn man aber in (i)–(iii) das Vorzeichen von λ bestimmt, sieht man, dass $\lambda > 0$. Die Nebenbedingung ist durch die Cobb-Douglas-Funktion $g(x,y) = x^{0.25}y^{0.75} - 2$ gegeben, die - wie man *mit einiger Mühe* nachprüft (vgl. Kall *Analysis für Ökonomen*), konkav ist. Die Zielfunktion ist linear, speziell also konvex.

Nach dem hinreichenden *Kriterium bei konvexen/konkaven Problemfunktionen* in §6.8.4 ist der berechnete Punkt $(x_0, y_0) = (16, 1)$ sogar ein *globaler Minimalpunkt*.

Geometrische Illustration der Lagrangebedingungen



Notwendige Bedingung dafür, dass in $(x_0, y_0) = (1, 1)$ ein lokaler Minimalpunkt der Aufgabe

$f(x,y) := x^2 + y^2 \;\rightarrow\; \min \qquad \text{NB: } g(x,y) := xy - 1 = 0$

vorliegt, ist in diesem Beispiel

Tangente an $\{(x,y) | f(x,y) = f(x_0,y_0)\}$ in (x_0, y_0)
$=$ Tangente an $\{(x,y) | g(x,y) = 0\}$ in (x_0, y_0)

Nach dem Satz über implizite Funktionen folgt aus der geometrisch vermuteten notwendigen Bedingung

$$\begin{aligned}&\text{Tangente an } \{(x,y)|f(x,y)=f(x_0,y_0)\} \text{ in } (x_0,y_0)\\ &= \text{Tangente an } \{(x,y)|g(x,y)=0\} \text{ in } (x_0,y_0)\end{aligned}$$

für stetig differenzierbare Funktionen f und g mit

$$f_y(x_0,y_0) \neq 0,\ \ g_x(x_0,y_0) \neq 0,\ \ g_y(x_0,y_0) \neq 0,$$

dass die Ableitung der impliziten Funktionen (= Steigung der jeweiligen Tangente) die Form $-f_x/f_y$ bzw. $-g_x/g_y$ haben. Damit gilt

$$\frac{f_x(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)} = \frac{g_x(x_0,y_0)}{g_y(x_0,y_0)}, \quad \text{d.h. } \lambda := \frac{f_x(x_0,y_0)}{g_x(x_0,y_0)} = \frac{f_y(x_0,y_0)}{g_y(x_0,y_0)}. \qquad (!!)$$

Die Beziehung (!!) lässt sich äquivalent ausdrücken durch

$$f_x(x_0,y_0) - \lambda g_x(x_0,y_0) = 0, \quad f_y(x_0,y_0) - \lambda g_y(x_0,y_0) = 0.$$

Zusammen mit der ebenfalls notwendigen Bedingung

$$g(x_0,y_0) = 0$$

sind das gerade die Lagrange-Bedingungen. Das ist natürlich kein präziser Beweis - den hatten wir oben gegeben (sogar unter der schwächeren Bedingung "$g_x(x_0,y_0) \neq 0$ oder $g_y(x_0,y_0) \neq 0$").

Bemerkungen

1. Es ist erlaubt, wie das in der Literatur auch häufig getan wird, die Lagrangefunktion mit + statt mit - anzusetzen, also:

$$\widetilde{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y).$$

Man überlegt sich leicht als Übungsaufgabe, dass im Vergleich zu "unserer" Form $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ gilt

$$\text{grad}\, L(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \;\Leftrightarrow\; \text{grad}\, \widetilde{L}(x_0, y_0, -\lambda_0) = 0,$$

d.h., es werden die gleichen *stationären Punkte* (x_0, y_0) der Aufgabe $f(x, y) \to \min / \max$ mit NB $g(x, y) = 0$ berechnet.
Für die ökonomische Interpretation ergeben sich aber Unterschiede, auch die hinreichenden Optimalitätsbedingungen hängen vom Vorzeichen vor dem Multiplikator λ ab.

2. Wenn $g_x(x_0, y_0) = g_y(x_0, y_0) = 0$, dann liefert die Lagrange-Methode eventuell keine Lösung, man betrachte z.B. die Aufgabe

$$x^2 + y \to \min_{(x,y)} \quad NB : (x - y)^2 = 0. \qquad (*)$$

Die NB ist genau dann erfüllt, wenn $x = y$, also ergibt sich bei der

Reduktionsmethode: Löse $x^2 + x \to \min_x$, also ist $(x_0, y_0) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ globale Lösung, wie man leicht ausrechnet. Die Lagrange-Bedingungen für $(*)$ in (x_0, y_0) sind aber widersprüchlich (Übungsaufgabe).

3. Leider findet man in Mathematik-Lehrbüchern für Studienanfänger häufig folgenden **gravierenden Fehler**, indem behauptet wird, dass bei der Lagrange-Methode das Optimieren unter einer Nebenbedingung überführt wird in das Problem, die Lagrangefunktion ohne Nebenbedingungen zu optimieren.

Gegenbeispiel: Die Aufgabe $\max xy$ bezüglich $x + y = 2$ hat offenbar den Punkt $(1, 1)$ als globale Lösung. Die Lagrange-Bedingungen sind $y - \lambda = 0$, $x - \lambda = 0$, $x + y = 2$, einzige Lösung ist $(x, y, \lambda) = (1, 1, 1)$. Die Lagrangefunktion (auch nicht bei Einsetzen von $\lambda = 1$)

$$L(x, y, \lambda) = xy - \lambda(x + y - 2) \quad \text{bzw.} \quad l(x, y) := L(x, y, 1)$$

hat kein lokales Extremum bei $(1, 1, 1)$ bzw. $(1, 1)$, da für $\varepsilon > 0$

$$L(1-\varepsilon, 1+\varepsilon, 1) = 1-\varepsilon^2 < 1 = L(1, 1, 1) = 1 < 1+\varepsilon^2 = L(1+\varepsilon, 1+\varepsilon, 1).$$

6.8.4. Hinreichende Optimalitätsbedingungen

(Fakultativer Stoff) [SH §14.4]

Wir geben hier nur zwei hinreichende Kriterien für *globale* Extrema unter Nebenbedingungen an, auf eine Bedingung für lokale Extrema (siehe Thm. 14.4.2 in [SH]) kommen wir im Sommersemester zurück.

Kriterium bei linearen Nebenbedingungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar, $g(x, y)$ sei linear (also $g(x, y) = ax + by + c$) und (x_0, y_0, λ_0) erfülle die Lagrange-Bedingungen. Dann gilt

a. Ist f konkav, so ist (x_0, y_0) globaler Maximalpunkt von f bezüglich $g(x, y) = 0$.
b. Ist f konvex, so ist (x_0, y_0) globaler Minimalpunkt von f bezüglich $g(x, y) = 0$.

Dieses Kriterium ist nur ein (wichtiger) Spezialfall des folgenden:

Kriterium bei konvexen/konkaven Problemdaten

$f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ seien stetig differenzierbar und (x_0, y_0, λ_0) erfülle die Lagrange-Bedingungen. Dann gilt

(i) Wenn mit diesem festen λ_0, aber variablem (x, y) die Funktion

$$(x, y) \mapsto l(x, y) := L(x, y, \lambda_0) = f(x, y) - \lambda_0 g(x, y)$$

konvex ist, so ist (x_0, y_0) ein globaler Minimalpunkt von f bezüglich der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$.

(ii) Wenn mit diesem festen λ_0, aber variablem (x, y) die Funktion

$$(x, y) \mapsto l(x, y) := L(x, y, \lambda_0) = f(x, y) - \lambda_0 g(x, y)$$

konkav ist, so ist (x_0, y_0) ein globaler Maximalpunkt von f bezüglich der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$.

Beweis: Wegen $l(x, y) = f(x, y)$ für $g(x, y) = 0$ folgt die Aussage sofort aus §6.7.

Wenn $\lambda_0 \geq 0$, so ist (i) z.B. erfüllt, wenn f konvex und g konkav ist (vgl. Einführungsbeispiel *Problem B*), während (ii) z.B. gilt, wenn f konkav und g konvex ist (vgl. Einführungsbeispiel *Problem A*). Für $\lambda_0 < 0$ überlege man sich analoge Kombinationen.

6.9. Homogene Funktionen

[Ro §7.11], [SH §12.5]

Definition Eine Funktion $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x, y)$ heisst

homogen vom Grade s

wenn für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und alle reellen Zahlen $t > 0$ gilt:

$$f(tx, ty) = t^s \cdot f(x, y). \tag{1}$$

Der *Homogenitätsgrad* kann dabei negativ, 0 oder positiv sein (im Prinzip reell), in Anwendungen sind wichtige Spezialfälle $s = 1$ und $s = 0$.

Die Definition der Homogenität bezieht sich in Anwendungen auch auch auf Definitionsbereiche $D \subset \mathbb{R}^2$, z.B. auf $D = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$; dann muss (1) nur für alle $(x, y) \in D$ gelten.

Beispiel 1 (Cobb-Douglas standardisiert)

Wir betrachten mit $\alpha \in (0,1)$

$$f(x,y) = x^{\alpha} y^{1-\alpha}, \quad x \geq 0,\ y \geq 0.$$

Man rechnet aus

$$\begin{aligned} f(tx,ty) &= (tx)^{\alpha}(ty)^{1-\alpha} \\ &= t^{\alpha+1-\alpha} \cdot x^{\alpha} \cdot y^{1-\alpha} \\ &= tf(x,y) \qquad \forall x,y \geq 0\ \forall t > 0. \end{aligned}$$

f ist homogen vom Grade 1, man sagt auch *linear homogen*. Es heisst etwa "linear homogene Produktionsfunktion" bei geeigneter Interpretation.

In der englischen Literatur spricht man beim Homogenitätsgrad 1 auch von *constant return to scale*.

Beispiel 2 (Cobb-Douglas allgemein)

Wir betrachten mit $\alpha, \beta > 0$

$$f(x,y) = x^\alpha y^\beta\,, \qquad x \geq 0,\ y \geq 0.$$

Mit der gleichen Rechnung wie eben ergibt sich

$$f(tx,ty) = t^{\alpha+\beta} f(x,y) \quad \forall x,y \geq 0\ \forall t > 0.$$

Satz: Eulersche Formel Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. f ist genau dann homogen vom Grade s, wenn für alle (x,y) in D

$$x\ f_x(x,y) + y\ f_y(x,y) = s\ f(x,y)$$

gilt.

Interpretation: Ist f eine Produktionsfunktion, die linear homogen ist ($s = 1$), und sind x, y zwei Faktormengen, so sagt die Eulersche Formel:

$$\sum_i \text{Faktor } i \cdot \text{ Grenzprodukt des Faktors } i = \text{ produzierte Menge}$$

Beweis der Eulerschen Formel: Ist f homogen von Grade s, so folgt aus

$$f(tx, ty) = t^s f(x, y), \qquad (**)$$

wenn wir beide Seiten der Gleichung nach t differenzieren (Kettenregel), dass

$$x f_x(tx, ty) + y f_y(tx, ty) = s t^{s-1} f(x, y),$$

die Eulersche Formel folgt mit $t = 1$. Die Umkehrung ist schwieriger zu beweisen, man vgl. in [SH] den Beweis von Thm. 12.6.1.

Übungsaufgabe: Man zeige: Ist f stetig differenzierbar und homogen vom Grade s, dann sind die partiellen Ableitungen

$$(x, y) \mapsto f_x(x, y) \quad \text{und} \quad (x, y) \mapsto f_y(x, y)$$

homogen vom Grade $s-1$ sind. (Hinweis: Man differenziere für festes (t, y) die Gleichung $(**)$ nach x, analog für festes (t, x) nach y.)