Mathematik III - Analysis für Ökonomen

Prof. Dr. D. Klatte [1]

Vorlesung im Herbstsemester 2008

Version 30.10.2008

[1] Universität Zürich, Institut für Operations Research und mathematische Methoden der Wirtschaftswissenschaften, Moussonstr. 15, CH-8044 Zürich, E-Mail: klatte@ior.uzh.ch

Die Lehrveranstaltung *Mathematik III - Analysis für Ökonomen* (im Folgenden verkürzt "Analysis für Ökonomen" genannt) wird für Studenten der Bachelorstufe im Rahmen der Studienordnungen für den Bachelor of Arts in Wirtschaftswissenschaften bzw. den Bachelor of Science in Informatik angeboten. Sie kann unabhängig von der Lehrveranstaltung *Mathematik III - Lineare Algebra für Ökonomen* absolviert werden, ist aber inhaltlich eng mit ihr verknüpft.

Studenten, die im Bachelor- und im späteren Masterstudium quantitative Methoden der Wirtschaftswissenschaften erlernen und anwenden wollen, wird der Besuch beider Veranstaltungen nachdrücklich empfohlen. Das betrifft vor allem Studenten mit Interesse für Finance, quantitative Methoden der Betriebswirtschaftslehre (z.B. Operations Research), empirische Wirtschaftsforschung und andere quantitative Felder der Volkswirtschaftslehre. Auch für numerisch interessierte Studenten der Informatik werden wichtige Grundlagen bereitgestellt.

Wichtige Inhalte der Lehrveranstaltung *Analysis für Ökonomen* sind Grundlagen über reelle Zahlen sowie Zahlenfolgen und -reihen, die Behandlung von Funktionenfolgen und -reihen (insbesondere Taylor- und Fourierreihen), eine Einführung in gewöhnliche Differentialgleichungen, die Differentialrechnung für Funktionen in n Veränderlichen und ihre Anwendung sowie nichtlineare Optimierungsaufgaben unter Gleichungs- und Ungleichungsnebenbedingungen. Literaturhinweise folgen weiter unten.

Der Stoff der Lehrgebiete *Mathematik I* und *Mathematik II* der Assessmentstufe wird als bekannt vorausgesetzt. Im Vergleich zu diesen Lehrveranstaltungen werden vorwiegend neue Inhalte vermittelt, aber wir greifen die dort behandelten Themen und Methoden auf, vertiefen sie, vor allem *begründen* wir sie und bauen sie aus. Das erfordert einen höheren Grad an *formalem* Herangehen im Vergleich zum Grundkurs.

Sehr wichtig ist die aktive Mitarbeit in den Übungen, vor allem auch das selbstständige Lösen der Übungsaufgaben für zu Hause.

Der Dozent bedankt sich bei H. Garbers (Universität Zürich) und B. Kummer (Humboldt-Universität Berlin) für das freundliche Überlassen von Vorlesungsausarbeitungen.

Literaturhinweise

O. Forster, *Analysis 2* und *Analysis 1*, vieweg studium - Grundkurs Mathematik, Vieweg, Braunschweig-Wiesbaden, 1999 und 2003.

P. Kall, *Analysis für Ökonomen*, Teubner Studienbücher Mathematik, B.G. Teubner, Stuttgart, 1982.

F. Riedel und Ph. Wichardt, *Mathematik für Ökonomen*, Springer, Heidelberg, 2007.

K. Marti und D. Gröger, *Grundkurs Mathematik für Ingenieure, Natur- und Wirtschaftswissenschaftler*, Physica-Verlag, Heidelberg, 2003.

K. Sydsaeter, P. Hammond, A. Seierstad, A. Strom, *Further Mathematics for Economic Analysis*, Pearson Education Limited, first published by Prentice Hall 2005.

G. Bärwolff, *Höhere Mathematik*, Elsevier - Spektrum Akademischer Verlag, München, 2006.

O. Forster und T. Szymczak, *Übungsbuch zur Analysis 2*, vieweg studium - Grundkurs Mathematik, Vieweg, Braunschweig-Wiesbaden, 2003.

O. Forster und R. Wessoly, *Übungsbuch zur Analysis 1*, vieweg studium - Grundkurs Mathematik, Vieweg, Braunschweig-Wiesbaden, 1995.

K. Endl und W. Luh, *Analysis I* und *Analysis II*, AULA-Verlag Wiesbaden, 1989.

C.P. Simon, L. Blume, *Mathematics for Economists*, W.W. Norton & Company, New York-London, 1994 (oder später).

A.C. Chiang, *Fundamental Methods of Mathematical Economics*, McGraw Hill, New York etc., 1984 (oder später, z.B. Neuauflage 2005 mit K. Wainwright als Ko-Autor).

Für einzelne Abschnitte oder als Grundlagen empfohlen:

B. Luderer, U. Würker, *Einstieg in die Wirtschaftsmathematik*, Teubner, Stuttgart-Leipzig-Wiesbaden, 2001.

R. Ansorge und R.-H. Oberle, *Mathematik für Ingenieure, Bd.2: Differential- und Integralrechnung mehrerer Variabler, Gewöhnliche Differentialgleichungen ...*, Wiley-VCH, Berlin, 2003.

H.H. Storrer, *Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften I*, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 1999.

H. Rommelfanger, *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Band I und Band 2*, Spektrum, Heidelberg-Berlin, ab 2001.

K. Sydsaeter und P. Hammond, Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Pearson Studium, München, ab 2004.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlagen

Dieses Kapitel stützt sich wesentlich auf *O. Forster, Analysis 1*, siehe auch *P. Kall, Analysis für Ökonomen* und *K. Marti/D.Gröger, Grundkurs Mathematik*. In all diesen Lehrbüchern finden sich auch ausführliche Einführungen in die Zahlbereiche, insbesondere die reellen Zahlen.

1.1 Einige wichtige Eigenschaften reeller Zahlen

1.1.1 Bezeichnungen von Zahlenmengen.

Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ nicht abgeschlossenen bezüglich Subtraktion und Division.

Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ abgeschlossen bezüglich Subtraktion, nicht abgeschlossen bezüglich Division.

Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ abgeschlossen bezüglich Subtraktion/Division, aber nicht jedem Element der Zahlengerade entspricht eine rationale Zahl, z.B. gilt $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\pi \notin \mathbb{Q}$, $e \notin \mathbb{Q}$.

Menge der rellen Zahlen $\mathbb{R}$

abgeschlossen bezüglich Subtraktion/Division und repräsentiert durch die Zahlengerade "ohne Lücken". Die Elemente von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ heissen *irrationale Zahlen.*

Die rellen Zahlen genügen gewissen Axiomen (Körperaxiome, Anordnungsaxiome, vgl. *O. Forster, Analysis 1*), die Basis für das Rechnen mit ihnen sind. Die zusätzliche wichtige Eigenschaft, dass die (reelle) Zahlengerade keine "Lücken" besitzt, kann auf sehr verschiedene Art und Weise ausgedrückt werden. Sie wird je nach Lehrbuch durch das eine oder andere ***Vollständigkeitsaxiom*** formuliert, meist über sogenannte *Dedekindsche Schnitte* oder *Intervallschachtelung* oder *Dezimalfolgen* oder *Cauchy-Folgen.* Letzteren Begriff werden wir zugrunde legen.

1.1.2 Repetition: Folgen und Konvergenz.

Eine reelle Zahlenfolge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ heisst *Nullfolge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $n' = n'(\varepsilon)$ gibt, so dass $|x_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq n'$ gilt[1].

Eine reelle Zahlenfolge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ heisst *konvergent*, wenn ein $a \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $\{a_n - a\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Dabei heisst dann a *Grenzwert* (oder *Limes*) der Folge $\{a_n\}$ und man schreibt $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ oder $a = \lim a_n$ oder $a_n \to a$. Der Grenzwert ist, falls er existiert, eindeutig bestimmt.

Ist die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergent, so heisst sie *divergent*. Existiert zu jedem reellen $c > 0$ ein Index n', so dass $a_n > c\ \forall n \geq n'$, so schreiben wir $\lim a_n = +\infty$ und sprechen von einem *uneigentlichen Grenzwert*. Sinngemäss ist $\lim a_n = -\infty$ definiert.

Eine Folge $\{a_n\}$ heisst *monoton steigend*, wenn $a_{n+1} \geq a_n$, aber *streng monoton steigend* wenn $a_{n+1} > a_n$ für alle n gilt. Sinngemäss sind *(streng) monoton fallende* Folgen definiert. Man sagt $\{a_n\}$ ist *(streng) monoton*, wenn sie eine der beiden (strengen) Monotonieeigenschaften hat.

Die Eigenschaften des Rechnens mit reellen Zahlenfolgen werden aus der *Mathematik I* bzw. der Schule als bekannt vorausgesetzt, etwa über Summe, Differenz, Produkt und Quotient zweier konvergenter Folgen. Erinnert sei auch an die wichtige Eigenschaft

$$a = \lim a_n,\ b = \lim b_n \text{ und } a_n \leq b_n\ \forall n \quad \text{implizieren} \quad a \leq b. \tag{1.1}$$

◇

1.1.3 Definition. Eine reelle Zahlenfolge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ heisst (reelle) ***Cauchyfolge*** (oder *Fundamentalfolge*), wenn gilt:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein n', so dass $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $m, n \geq n'$. ◇

1.1.4 Satz. *Jede konvergente Folge reeller Zahlen ist eine Cauchy-Folge.* ◇

Bemerkenswert ist, dass diese Bedingung für Konvergenz von $\{a_n\}$ (gegen einen Grenzwert a) besagt, dass für genügend grosse Indizes m, n die Differenz $|a_n - a_m|$ beliebig klein wird - eine Eigenschaft, die ohne Kenntnis des Grenzwerts a auskommt.

Beweis von Satz 1.1.4. Seien $\{a_n\}$ eine reelle Zahlenfolge mit Grenzwert a und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $n' \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \frac{1}{2}\varepsilon$ für alle $n \geq n'$ gilt. Daraus folgt für beliebige $m, n \geq n'$

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) + (a - a_m)| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

nach den Gesetzen über das Rechnen mit dem Absolutbetrag. □

Die Umkehrung dieses Satzes nehmen wir nun als Vollständigkeitsaxiom (eine Eigenschaft, die unserer Vorstellung von der "lückenlosen Zahlengerade" entspricht).

[1] Man sagt auch: Für jedes $\varepsilon > 0$ und *fast alle* n gilt $|x_n| < \varepsilon$.

1.1.5 Die Vollständigkeitseigenschaft von $\mathbb{R}$.

Jede Cauchy-Folge reeller Zahlen hat in $\mathbb{R}$ einen Grenzwert. $\diamond$

1.1.6 Bemerkung. In der gesamten Vorlesung werden die Bezeichnungen $A \subset B$ bzw. $B \supset A$ dafür benutzt zu sagen, dass A eine *Teilmenge* von B ist. Handelt es sich um eine *echte* Teilmenge, schreiben wir $A \neq B$ hinzu. $\diamond$

1.1.7 Das Intervallschachtelungsprinzip. Die Vollständigkeit der reellen Zahlen kann man auch - wie in Satz 1.1.8 angegeben wird - mit dem folgenden *Intervallschachtelungsprinzip* (Abkürzung *ISP*) charakterisieren:

- Sei $I_0 \supset I_1 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$ eine Folge ineinandergeschachtelter abgeschlossener Intervalle $I_n = [a_n, b_n]$ mit $b_n - a_n \to 0$, wobei $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $a_n \leq b_n$. Dann gibt es genau eine reelle Zahl x mit $x \in I_n$ füralle n.

Das entspricht anschaulich ebenfalls der "lückenlosen Zahlengerade". $\diamond$

1.1.8 Satz. *Die Vollständigkeitseigenschaft von $\mathbb{R}$ und das Intervallschachtelungsprinzip sind äquivalent.* $\diamond$

Beweis. Setzen wir zunächst voraus, dass jede Cauchy-Folge reeller Zahlen in $\mathbb{R}$ konvergiert. Seien $\{I_n\}$ eine Folge gemäss ISP und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein n', so dass $|b_n - a_n| < \varepsilon \ \forall n \geq n'$. Wegen

$$a_k \leq a_m \leq b_m \leq b_k \quad \text{und} \quad a_k \leq a_n \leq b_n \leq b_k \quad \forall k \ \forall m, n \geq k \tag{1.2}$$

gilt $|a_n - a_m| < \varepsilon \ \forall m, n \geq n'$. Somit ist die Folge der linken Randpunkte $\{a_n\}$ eine Cauchy-Folge und konvergiert also nach der Vollständigkeitseigenschaft gegen ein $x \in \mathbb{R}$. Für jedes feste k gilt nach (1.2) die Ungleichungskette $a_k \leq a_n \leq b_k \ \forall n \geq k$, also nach (1.1) auch $a_k \leq x \leq b_k$, was zu zeigen war.

Für den Beweis der Rückrichtung sei nun $\{a_n\}$ eine Cauchy Folge. Nach Definition gibt es insbesondere für die Folge $\{2^{-k}\}$ eine Folge natürlicher Zahlen $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$, so dass

$$|a_n - a_m| < 2^{-k} \quad \forall m, n \geq n_k.$$

Offenbar gilt nun (Zeichnung!)

$$I_k := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a_{n_k}| \leq 2^{-k+1}\} \supset \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a_{n_{k+1}}| \leq 2^{-k}\} = I_{k+1} \quad \forall k.$$

Die Folge $\{I_k\}$ erfüllt die Voraussetzungen des ISP, also existiert genau eine reelle Zahl $x^* \in I_k \ \forall k$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $2^{-k+2} < \varepsilon$ und folglich gilt für jedes $n \geq n_k$ (Dreiecksungleichung anwenden)

$$|a_n - x^*| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - x^*| < 2^{-k} + 2^{-k+1} < 2^{-k+2} < \varepsilon,$$

also $a_n \to x^*$. $\square$

1.1.9 Definition. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ heisst *nach unten beschränkt*, wenn es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $x \geq a$ für alle $x \in M$ gilt. M heisst *nach oben beschränkt*, wenn es ein $b \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $x \leq b$ für alle $x \in M$ gilt. Dabei heissen a *untere Schranke von* M bzw. b *obere Schranke von* M. M heisst *beschränkt*, wenn sie nach unten und oben beschränkt ist. $\diamond$

1.1.10 Satz. (Existenz von Supremum/Infimum). *Jede nach oben beschränkte, nichtleere Menge* $M \subset \mathbb{R}$ *besitzt eine kleinste obere Schranke,* Supremum von M *genannt und* $\sup M$ *geschrieben. Jede nach unten beschränkte, nichtleere Menge* $M \subset \mathbb{R}$ *besitzt eine grösste untere Schranke,* Infimum von M *genannt und* $\inf M$ *geschrieben.* $\diamond$

Beweis. Wir beweisen nur den ersten Teil des Satzes, der zweite Teil folgt analog. Falls M ein Element b mit $b \geq x \ \forall x \in M$ enthält, so ist nichts zu zeigen, es gilt dann $b = \sup M$. Wir betrachten also den anderen Fall und benutzen das ISP zum Beweis. Seien $m \in M$ und eine obere Schranke $\bar{s}$ von M beliebig, aber fest gewählt. Setze

$$r_1 := m, \quad s_1 := \bar{s} \quad \text{und} \quad t_1 := \frac{1}{2}(r_1 + s_1) = \text{ Mittelpunkt von } [r_1, s_1].$$

Offenbar gilt $r_1 < t_1 < s_1$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

F1: t_1 ist ebenfalls obere Schranke von M, dann setze $r_2 := r_1, \quad s_2 := t_1$.

F2: t_1 ist keine obere Schranke von M, dann existiert nach Definition der oberen Schranke ein $m' \in M$ mit $m' > t_1$. Setze $r_2 := t_1, \quad s_2 := s_1$.

Da m kein grösstes Element von M sein konnte, gibt es in beiden Fällen ein $m' \in M$ mit

$$m' > r_2, \quad s_2 > r_2, \quad s_2 \text{ obere Schranke von } M.$$

Mit dem Intervall $[r_2, s_2]$ und seinem Mittelpunkt t_2 wiederholen wir nun diesen Schluss. Wir erhalten eine Folge von Intervallen $I_k = [r_k, s_k]$, $k = 1, 2, \ldots$, mit folgenden Eigenschaften:

$r_{k-1} \leq r_k < s_k \leq s_{k-1}$,
r_k ist keine obere Schranke von M,
s_k ist obere Schranke von M,
Länge von I_k = halbe Länge von I_{k-1}.

Die Folge $\{I_k\}$ genügt den Voraussetzungen des ISP und definiert somit eine reelle Zahl $b \in I_k$ für alle k. Man schliesst daraus sofort $b = \sup M$. $\square$

1.1.11 Definition. Sei $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$. Gilt $\sup M \in M$, so nennt man diese Zahl auch *Maximum* von M und schreibt $\max M$. Analog: Gilt $\inf M \in M$, so nennt man diese Zahl auch *Minimum* von M und schreibt $\min M$. $\diamond$

1.1.12 Vereinbarungen. Wir schreiben $\sup M = +\infty$ bzw. $\inf M = -\infty$, falls M nicht nach oben (bzw. nach unten) beschränkt ist, und wir setzen $\sup \emptyset := -\infty$ bzw. $\inf \emptyset = +\infty$. $\diamond$

1.1.13 Korollar. *Mit den eben getroffenen Vereinbarungen gilt für $M \subset \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$*

(i) $x < \sup M \quad \Leftrightarrow \quad \exists a \in M: \; x < a.$

(ii) $x > \inf M \quad \Leftrightarrow \quad \exists a \in M: \; x > a.$ ◇

Beweis. Wir zeigen (i), (ii) geht analog. Für $M = \emptyset$ ist nichts zu beweisen. Sei $M \neq \emptyset$ und $x < \sup M$. Wäre $x \geq a$ für alle $a \in M$, so wäre x obere Schranke von M, was der Definition von $\sup M$ (sowohl im Standardfall als auch für eine nach oben unbeschränkte Menge M) widerspräche. Umgekehrt sei a ein Element von M mit $x < a$. Dann gilt trivial $x < a \leq \sup M$. □

1.1.14 Abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{R}$. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ heisst *abgeschlossen*, wenn für jede Folge $\{a_n\} \subset M$, die gegen ein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, der Grenzwert a zu M gehört.

Insbesondere sind offenbar alle endlichen Teilmengen von $\mathbb{R}$ (d.h., Teilmengen mit endlich vielen Elementen) abgeschlossen. Nach Definition ist auch die leere Menge abgeschlossen.

Wichtige abgeschlossene Teilmengen in $\mathbb{R}$ sind die beschränkten, abgeschlossen Intervalle $[a, b]$ sowie die unbeschränkten, abgeschlossen Intervalle $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$ und $(-\infty, +\infty)$ (Übungsaufgabe: Beweis, dass es abgeschlossene Mengen sind!)

1.1.15 Übung. Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig (auf ganz I) und $c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die *Niveaumengen* $L_f(c)$ und die sogenannten *unteren Niveaumengen* $\Lambda_f(c)$,

$$L_f(c) := \{x \in I | f(x) = c\} \quad \text{und} \quad \Lambda_f(c) := \{x \in I | f(x) \leq c\}$$

abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind. ◇

1.2 Häufungspunkte von Zahlenfolgen

1.2.1 Teilfolgen. Sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ eine aufsteigende Folge natürlicher Zahlen. Dann heisst die Folge

$$\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} = \{a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots\}$$

(unendliche) ***Teilfolge*** von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. ◇

1.2.2 Definition. Eine reelle Zahl a heisst *Häufungspunkt* der Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, falls es eine Teilfolge der Folge$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gibt, die gegen a konvergiert. ◇

1.2.3 Grenzwerte und Häufungspunkte.

Folgende Aussagen über eine reelle Zahlenfolge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sind einfach einzusehen und sollten von den Studenten als Übungsaufgabe gelöst werden:

(i) Wenn die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert, so konvergiert jede ihrer Teilfolgen gegen a. Mit anderen Worten: Für jede konvergente Folge ist ihr Grenzwert ihr einziger Häufungspunkt.

(ii) a ist genau dann Häufungspunkt der Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ die ε-Umgebung $U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x-a| < \varepsilon\}$ von a unendlich viele Elemente der Folge enthält.

Es sei bemerkt, dass eine Folge mit genau einem Häufungspunkt noch nicht konvergent sein muss, man betrachte die Folge mit den Gliedern $a_n = n \cdot \min\{0, (-1)^n\}$. ◇

Eine Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ heisst nach oben beschränkt, nach unten beschränkt bzw. beschränkt, wenn die Menge reeller Zahlen $M = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die betreffende Eigenschaft hat.

1.2.4 Satz. *Jede beschränkte und monotone Folge reeller Zahlen ist konvergent.* ◇

Beweis. Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend, d.h., $a_n \leq a_{n+1}$ für alle n. Da die Folge beschränkt ist, existiert

$$b = \sup\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Wir zeigen $b = \lim_{n\to\infty} a_n$. Dazu sei $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest. Weil $b - \varepsilon$ keine obere Schranke von $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist, existiert ein m, so dass

$$a_m > b - \varepsilon.$$

Wegen der hier vorausgesetzten Monotonie folgt erst recht

$$a_n > b - \varepsilon, \text{ also } a_n - b > -\varepsilon \ \forall n \geq m.$$

Andererseits ist für alle n offenbar $b \geq a_n$ und somit $a_n - b \leq 0 < \varepsilon$ erfüllt, womit folgt

$$|a_n - b| < \varepsilon \ \forall n \geq m.$$

Da ε beliebig gewählt war, folgt $b = \lim\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ aus der Grenzwertdefinition. Ist $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend, zeigt man analog, dass $a = \inf\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ der Grenzwert der Folge ist. □

1.2.5 Übung. (Die Zahl e.) Man zeige unter Anwendung von Satz 1.2.4, dass die Folge $a_n := (1 + \frac{1}{n})^n$ konvergiert. Man definiert dann $e := \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$. ◇

1.2.6 Übung. Zeigen Sie, dass jede konvergente reelle Zahlenfolge beschränkt ist und geben Sie ein Beispiel dafür an, dass die Umkehrung nicht gilt. $\diamond$

1.2.7 Satz. (Satz von Bolzano-Weierstrass). *Jede beschränkte Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen besitzt einen Häufungspunkt.* $\diamond$

Beweis: Wir wählen aus $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in folgenden Schritten eine Teilfolge:

S0 $n_1 := 1,\ \ k := 1,$

S1 $b_k := \sup\{a_n \,|\, n > n_k\},$

S2 wähle $n_{k+1} > n_k$ mit $b_k \geq a_{n_{k+1}} > b_k - \frac{1}{k}$, setze $k := k+1$, gehe zu S1.

Der Auswahlschritt S2 ist nach Korollar 1.1.13 gerechtfertigt. Die Folge $\{b_k\}$ ist wohldefiniert und beschränkt, da das Supremum jeweils über Teilmengen der beschränkten Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gebildet wird. Sie ist offenbar monoton fallend. Nach Satz 1.2.4 hat $\{b_k\}$ einen Grenzwert b. Folglich konvergiert auch $b_k - \frac{1}{k}$ gegen b.

Es bleibt zu zeigen, dass die gemäss S2 "eingeschachtelte" Teilfolge $\{a_{n_k}\}$ auch gegen b konvergiert.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest. Dann existieren ein k' und ein k'', so dass

$$b_k - b < \varepsilon \ \ \forall k \geq k' \quad \text{und} \quad b_k - b - \frac{1}{k} > -\varepsilon \ \ \forall k \geq k'',$$

also mit $k^* = \max\{k', k''\}$

$$-\varepsilon < b_k - \frac{1}{k} - b < a_{n_{k+1}} - b \leq b_k - b < \varepsilon \ \ \forall k \geq k^*,$$

was zu zeigen war. $\square$

1.2.8 (Einschachtelungsprinzip). Der letzte Teil des Beweises geht analog, um Folgendes zu beweisen: Seien $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Zahlenfolgen mit $a_n \leq c_n \leq b_n\ \forall n$ und gilt $a := \lim a_n = \lim b_n$, so konvergiert auch $\{c_n\}$ gegen a. $\diamond$

1.2.9 Definition. Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Dann heissen ihr grösster bzw. kleinster Häufungspunkt *Limes superior* bzw. *Limes inferior* dieser Folge. Statt $\limsup$ ist auch die Schreibweise $\overline{\lim}$, statt $\liminf$ auch die Schreibweise $\underline{\lim}$ üblich. Ferner setzt man

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} a_n &:= +\infty, && \text{falls } \{a_n\} \text{ nach oben unbeschränkt ist,} \\ \liminf_{n\to\infty} a_n &:= -\infty, && \text{falls } \{a_n\} \text{ nach unten unbeschränkt ist.} \end{aligned}$$

$\diamond$

1.2.10 Eigenschaften von limsup und liminf. Sei $\{a_n\}$ eine reelle Zahlenfolge. Dann gelten die folgenden Aussagen:

1. Es gilt $\inf\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq \sup\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Ist $\{a_n\}$ konvergent, so gilt $\lim a_n = \liminf a_n = \limsup a_n$.
3. Sind $\liminf a_n$ und $\limsup a_n$ endlich und gilt $a := \liminf a_n = \limsup a_n$, so ist a Grenzwert von $\{a_n\}$.

Zu Aussage 1.: Ist $\{a_n\}$ beschränkt, so ergibt sich die mittlere Ungleichung aus der Definition, die äusseren Ungleichungen aus den Definitionen von Infimum und Supremum einer Menge in $\mathbb{R}$. Ist die Folge unbeschränkt, so sind die Ungleichungen trivial.

Zu Aussage 2.: Ist $\{a_n\}$ konvergent, so ist die Folge beschränkt und hat genau einen Häufungspunkt, wie wir schon wissen.

Zu Aussage 3: Ist $\varepsilon > 0$ beliebig, dann genügen fast alle Elemente a_n der Ungleichung $|a_n - a| < \varepsilon$. Das sieht man so (indirekter Beweis): Wäre das nicht der Fall, würde es eine unendliche (aber auch beschränkte) Teilfolge $\{a_{n_k}\}$ von $\{a_n\}$ mit $|a_{n_k} - a| \geq \varepsilon\}$ geben, die nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass dann einen Häufungspunkt b hätte, wobei $|a - b| \geq \varepsilon$. Nun ist b aber auch Häufungspunkt von $\{a_n\}$ - im Widerspruch zur Voraussetzung. $\diamond$

1.2.11 Satz. (Quadratwurzeln). *Seien $a > 0$ und $x_0 > 0$ reelle Zahlen, und es sei*

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n} \right),\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Dann konvergiert die Folge $\{x_n\}$ gegen die Quadratwurzel von a, d.h. gegen die eindeutig bestimmte positive Lösung der Gleichung $x^2 = a$. $\diamond$

Beweisidee. Man zeige zunächst, dass die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und beschränkt ist und $0 < a/x_1 \leq x_n \leq x_1$ $(\forall n \geq 1)$ gilt, zum Beweis vergleiche man *O. Forster, Analysis 1*, Satz 1 in §6. Damit konvergiert $\{x_n\}$ gegen ein $x > 0$, und es folgt nach den Rechengesetzen für Folgen

$$\lim \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x}).$$

Andererseits gilt auch $\lim x_{n+1} = x$, also haben wir

$$x = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x}) \text{ und somit } x^2 = a.$$

Diese Gleichung hat offenbar eine *eindeutige* Lösung, denn $x^2 = a$ und $y^2 = a$ implizieren $0 = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$, was wegen $x + y > 0$ auf $x = y$ führt. $\square$

Das in diesem Satz angegebene Iterationsverfahren kannten schon die Babylonier, die damit Quadratwurzeln natürlicher Zahlen näherungsweise bestimmt haben. Das Verfahren konvergiert sehr schnell, es ist ein Spezialfall des vielleicht aus der Schule bekannten Newton-Verfahrens.

1.2.12 Übung. (*O. Forster, Analysis 1*, Aufgabe 6.6; Lösung im Übungsbuch). Man berechne

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}\,,$$

d.h. den Grenzwert der durch $a_0 := 1$, $a_{n+1} := \sqrt{1+a_n}$ iterativ definierten Folge.

Für die, die es allein probieren wollen: Der Grenzwert ist $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (goldener Schnitt $a : 1 = 1 : (a-1)$, $a > 1$). Man zeigt dazu, dass $\{a_n\}$ monoton wachsend und beschränkt ist und wertet die Definitionsgleichung $a_{n+1} := \sqrt{1+a_n}$ (Quadrieren!) aus. ◇

1.2.13 Übung. (*P. Kall, Analysis für Ökonomen*, §2.4) Gegeben seien die Folgen $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ und $\{c_n\}$, die wie folgt definiert sind:

$a_n = 2^{n(-1)^n}$ und $b_n = n(1+(-1)^n)$ sowie $c_n = n$ modulo $4 + 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Bestimmen Sie für jede dieser Folgen alle Häufungspunkte und dazugehörige konvergente Teilfolgen sowie den Limes inferior und den Limes superior. ◇

1.3 Unendliche Reihen

Der Aufbau dieses Abschnitts entspricht dem von §7 in *O. Forster, Analysis 1* bzw. §2.5 in *P. Kall, Analysis für Ökonomen*, man kann dort auch alle Beweise finden. Ausgewählte Beweise werden in der Vorlesung gegeben.

1.3.1 Definition. Gegeben ist eine reelle Zahlenfolge $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$. Die Folge $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ der *Partialsummen*

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \ldots + a_n,$$

heisst ***(unendliche) Reihe*** mit den *Gliedern* a_k und wird kurz durch

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

dargestellt. Wir sagen, dass eine unendliche Reihe gegen einen Wert s ***konvergiert***, falls die Folge der Partialsummen gegen s konvergiert. Man schreibt in diesem Falle $s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$. ◇

Hinweis: Unendliche Reihen können auch von $k = 1$ (oder einem anderen ganzzahligen Index) ab aufsummiert werden. Sofort aus der Konvergenzdefinition folgt für jede konvergente Reihe, dass $\sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$.

1.3.2 Übung. (Geometrische Reihe) Sei x eine reelle Zahl mit $|x| < 1$. Zeigen Sie

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

mit Hilfe der Summenformel für die Partialsummen $\sum_{k=0}^{n} x^k$. $\diamond$

1.3.3 Satz. (Cauchy-Kriterium) *Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n' existiert, so dass*

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq m \geq n'. \qquad \diamond$$

Beweis. Die Behauptung besagt, dass die Partialsummen eine Cauchy-Folge bilden. Damit folgt der Satz aus der Vollständigkeitseigenschaft 1.1.5 der reellen Zahlen und Satz 1.1.4. $\square$

1.3.4 Satz. (notwendige Bedingung) *Wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, dann ist die Folge $\{a_k\}_{k\to\infty}$ eine Nullfolge.* $\diamond$

Beweis. Setze im Cauchy-Kriterium $m = n$. $\square$

1.3.5 Übung. Zeigen Sie am Beispiel der *harmonischen Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, dass die Umkehrung von Satz 1.3.4 nicht gilt. $\diamond$

1.3.6 Satz. (nichtnegative Glieder) *Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit $a_k \geq 0$ $\forall k$ konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt ist.* $\diamond$

Beweis. Offenbar ist die Folge der Partialsummen monoton wachsend. Wenn sie beschränkt ist, ist sie folglich nach Satz 1.2.4 konvergent. Andererseits ist eine konvergente Folge beschränkt, wie wir wissen. $\square$

1.3.7 Übung. Man zeige, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert. Hinweis: Man zeige, dass die Partialsummen s_n beschränkt sind. $\diamond$

1.3.8 Satz. (Leibniz-Kriterium über alternierende Reihen) *Ist $\{a_k\}$ eine monoton fallende Nullfolge mit $a_k \geq 0$ $\forall k$, dann konvergiert die alternierende Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$. Für den Grenzwert s und die Partialsummen s_n gilt dann die Abschätzung $|s_n - s| \leq 1$* $\diamond$

Den Beweis entnehmen Sie bitte der angegebenen Literatur.

1.3.9 Beispiel. Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

konvergiert offenbar nach dem Leibniz-Kriterium. Wir sehen dann in einem späteren Kapitel, dass der Grenzwert gerade die Zahl $\ln 2$ ist. $\diamond$

1.3.10 Definition. Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heisst ***absolut konvergent***, falls die Reihe der Absolutbeträge $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert. $\diamond$

1.3.11 Sofort aus der Definition, der Ungleichung

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k|$$

und dem Cauchy-Kriterium folgt die Aussage:

Eine absolut konvergente Reihe konvergiert auch im gewöhnlichen Sinne.

Die Umkehrung gilt natürlich nicht, wie die alternierende harmonische Reihe zeigt. $\diamond$

1.3.12 Satz. (Majorantenkriterium) *Ist $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ mit $c_k \geq 0\ \forall k$ eine konvergente Reihe, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut, falls*

$$|a_k| \leq c_k\ \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Bemerkung: Die Reihe $\sum c_k$ heisst dann Majorante von $\sum a_k$. $\diamond$

Beweis. Da $\sum c_k$ das Cauchy-Kriterium erfüllt, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n', so dass mit $|a_k| \leq c_k$ für alle k gilt:

$$\forall n \geq m \geq n' : \quad \varepsilon > \sum_{k=m}^{n} c_k \geq \sum_{k=m}^{n} |a_k|,$$

also erfüllt auch $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ das Cauchy-Konvergenzkriterium und ist folglich konvergent. $\square$

1.3.13 Weitere hinreichende Kriterien:

1. Quotientenkriterium

   Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit $a_k \neq 0$ für $k \geq n'$ mit $n' \in \mathbb{N}$ und gibt es eine Zahl τ mit $0 < \tau < 1$, so dass

   $$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq \tau \quad \forall k \geq n',$$

   dann konvergiert die Reihe $\sum a_k$ absolut.

2. Wurzelkriterium

   Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit $a_k \geq 0 \ \forall k$ und gibt es ein $k' \in \mathbb{N}$ und ein τ mit $0 < \tau < 1$, so dass
   $$\sqrt[k]{a_k} \leq \tau \quad \forall k \geq k',$$
   dann konvergiert die Reihe $\sum a_k$.

3. Integral-Vergleichskriterium

   Sei $f : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ eine monoton fallende Funktion. Dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ genau dann, wenn das uneigentliche Integral $\int_1^{\infty} f(x)dx$ konvergiert.

Zum Beweis von 1. und 2. vgl. *P. Kall, Analysis für Ökonomen* oder *K. Marti/D.Gröger, Grundkurs Mathematik*, zum Beweis von 3. (auch von 1.) vgl. *O. Forster, Analysis 1*. ◇

1.3.14 Beispiel. (Exponentialreihe: alternative Definition der Zahl e) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist die *Exponentialreihe*
$$\exp\,(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$
absolut konvergent, wie man leicht mit dem Quotientenkriterium überprüft. Man zeige
$$\exp\,(1) = e \quad \text{und} \quad \exp\,(x) = e^x$$
mit $e := \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$ als Übung. ◇

1.3.15 Übung. Zeigen Sie, dass (vgl. Quotientenkriterium) die Existenz eines $n' \in \mathbb{N}$ mit
$$a_k \neq 0, \quad \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1 \quad \forall k \geq n',$$
nicht hinreicht, dass $\sum a_k$ konvergiert. Hinweis: harmonische Reihe. ◇

1.3.16 Übung. (*K. Marti/D.Gröger, Grundkurs Mathematik*) Man untersuche das Konvergenzverhalten der folgenden Reihen:

- $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \ldots$
- $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \ldots + \frac{k}{2^k} + \ldots$
- $(\frac{1}{2} + 1) + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2} + \frac{1}{3})^3 + \ldots + (\frac{1}{2} + \frac{1}{k})^k + \ldots$
- $1 - 2x + x^2 - 2x^3 + x^4 - 2x^5 + - \ldots, \quad$ wobei $x \in \mathbb{R}$.

◇

Kapitel 2

Funktionenfolgen und -reihen

2.1 Konvergenz und gleichmässige Konvergenz

Dieser Abschnitt lehnt sich eng an §21 in *O. Forster, Analysis 1* an.

2.1.1 Im vorigen Kapitel stiessen wir bereits auf die Exponentialreihe

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

die man auch durch eine Folge der (Partialsummen-)Funktionen

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \quad \text{(Polynome)}$$

ersetzen kann: Für jedes festgehaltene $x \in \mathbb{R}$ ist die Folge $\{s_n(x)\}$, wie wir wissen, (absolut) konvergent gegen die Zahl e^x. Mit anderen Worten: Die *Folge von Funktionen* $\{s_n(\cdot)\}_{n=0,1,\ldots}$ konvergiert *punktweise* gegen die Exponentialfunktion. Es gilt also

> Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ und jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n' = n'(\varepsilon, x)$,
> so dass $|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}| < \varepsilon$ für alle $n \geq n'$ ist.

Eine interessante Frage ist - wir werden sie später mit "ja" beantworten - , ob n' unabhängig von x (aber natürlich abhängig von ε) gewählt werden kann, man spricht dann von *gleichmässiger Konvergenz* der Funktionenfolge. Wir definieren im Folgenden diesen Begriff sehr allgemein. $\diamond$

2.1.2 Definition. Sei M eine Menge und $f_n : M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, Funktionen. Man nennt $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine ***Funktionenfolge*** und sagt: $\{f_n\}$ ***konvergiert punktweise*** (oder einfach *konvergiert*) gegen $f : M \to \mathbb{R}$, falls für jedes $x \in M$ die Folge der reellen Zahlen $\{f_n(x)\}$ gegen $f(x)$ konvergiert, d.h.,

zu jedem $x \in M$ und jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n' = n'(\varepsilon, x)$,
so dass $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $n \geq n'$ ist.

Man sagt: $\{f_n\}$ ***konvergiert gleichmässig*** gegen $f : M \to \mathbb{R}$,

falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n' = n'(\varepsilon)$ existiert, so dass
$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in M$ und alle $n \geq n'$ gilt.

Die Folge der Partialsummen $\{s_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ heisst ***Funktionenreihe*** und man schreibt dafür auch $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$, unabhängig davon, ob sie konvergiert oder nicht. Die Begriffe der *Konvergenz und gleichmässigen Konvergenz einer Funktionenreihe* beziehen sich dann auf die Funktionenfolge $\{s_n\}$. Die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ heisst *absolut konvergent*, wenn für jedes $x \in M$ die Reihe (reeller Zahlen) $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x)|$ konvergiert. $\diamond$

2.1.3 Beispiel. Gleichmässige Konvergenz bedeutet anschaulich, dass die Folge $\{f_n(x)\}$ für alle x aus M gleich schnell gegen $f(x)$ konvergiert. Offenbar folgt aus der gleichmässigen Konvergenz von $\{f_n\}$ gegen f die punktweise Konvergenz von $\{f_n\}$ gegen f.

Wir geben jetzt eine Folge von Funktionen von $[0, 1]$ in $\mathbb{R}$ an, die punktweise, aber nicht gleichmässig konvergiert (Zeichnung!):

$$f_n(x) = \begin{cases} n - n^2|x - \frac{1}{n}| & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{2}{n}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N},\, n \geq 2)$$

Offenbar sind alle Funktionen f_n stetig. Die Folge $\{f_n\}$ konvergiert punktweise gegen die Nullfunktion $f(x) \equiv 0$, denn:

für alle $n \geq 2$ gilt $f_n(0) = 0$,

zu jedem $x \in (0, 1]$ gibt es ein $n' \geq 2$, so dass $\frac{2}{n} \leq x \quad \forall n \geq n'$,

also ist $f_n(x) = 0$ für alle x und alle $n \geq n'$ (n' hängt von x ab). Also ist die Folge $\{f_n\}$ punktweise konvergent gegen $f(x) \equiv 0$. Die Folge $\{f_n\}$ konvergiert aber nicht gleichmässig gegen die Nullfunktion, denn für kein $n \geq 2$ gilt $|f_n(x)| < 1$ für <u>alle</u> $x \in [0, 1]$. $\diamond$

Man beachte, dass in diesem Beispiel die Grenzfunktion $f \equiv 0$ der betreffenden Folge stetiger Funktionen wieder stetig ist. Das ist allgemein nicht so, vgl. Beispiel 2.1.6. Es gilt jedoch der folgende Satz.

2.1.4 Satz. *Sei M eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $f_n : M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, Funktionen, die in jedem Punkt $x^0 \in M$ stetig sind. Falls $\{f_n\}$ gleichmässig gegen eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ konvergiert, so ist auch f in jedem Punkt $x^0 \in M$ stetig.* $\diamond$

Beweis. Zur Erinnerung: f ist stetig in einem Punkt $x^0 \in M$, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$|f(x) - f(x^0)| < \varepsilon, \quad \text{falls } x \in M \text{ und } |x - x^0| < \delta.$$

Seien $x^0 \in M$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $\{f_n\}$ gleichmässig gegen f konvergiert, existiert ein $\nu \in \mathbb{N}$, so dass

$$|f_\nu(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in M. \tag{2.1}$$

Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von f_ν, gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$|f_\nu(x) - f_\nu(x^0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in M,\, |x - x^0| < \delta. \tag{2.2}$$

Nehmen wir nun ein beliebiges $x \in M$ mit $|x - x^0| < \delta$, so folgt nach Dreiecksungleichung

$$|f(x) - f(x^0)| \le |f(x) - f_\nu(x)| + |f_\nu(x) - f_\nu(x^0)| + |f_\nu(x^0) - f(x^0)|.$$

Der erste und dritte Summand auf der rechten Seite der Ungleichung sind $< \frac{\varepsilon}{3}$ nach (2.1), der mittlere Summand ist auch $< \frac{\varepsilon}{3}$, und zwar nach (2.2). Also folgt $|f(x) - f(x^0)| < \varepsilon$, was zu zeigen war. □

2.1.5 Bemerkung. Wir haben im vorhergehenden Beweis gar nicht davon Gebrauch gemacht, dass M eine Teilmenge der reellen Zahlen ist: Interpretiert man $|\cdot|$ als Norm in einem Vektorraum und M als Teilmenge dieses Vektorraums, so gelten alle Schlüsse völlig analog. Mehr noch: M könnte Teilmenge eines sogenannten metrischen Raums sein und $|x - x^0|$ durch den im metrischen Raum definierten *Abstand* zwischen x und x^0 ersetzt werden. . ◇

2.1.6 Beispiel. Wir definieren eine Folge stetiger Funktionen durch

$$x \in [0,1] \mapsto f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx\,, & \text{falls } 0 \le x \le \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{falls } x > \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Die Folge konvergiert offenbar punktweise gegen die unstetige Funktion

$$x \in [0,1] \mapsto f(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{falls } x = 0, \\ 0\,, & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

Die Folge ist nicht gleichmässig konvergent, da für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|f_n(\frac{1}{2n}) - f(\frac{1}{2n})| = |f_n(\frac{1}{2n}) - 0| = \frac{1}{2}.$$

◇

2.1.7 Übung. Man zeige, dass die Folge der Polynome

$$f_n(x) = x^n, \quad x \in [0,1] \quad (n \in \mathbb{N}),$$

punktweise, aber nicht gleichmässig konvergiert. ◇

2.1.8 Man betrachte den Vektorraum $C[a,b]$ der auf dem Intervall $[a,b]$ stetigen Funktionen g mit der Maximumnorm

$$\|g\|_\infty = \max\{|g(x)| \mid x \in [a,b]\},$$

dann lässt sich gleichmässige Konvergenz einer Folge stetiger Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ gegen eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ offenbar auch durch

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$

ausdrücken. ◇

2.1.9 Satz. (Vertauschung von Limesbildung und Integration) *Seien die Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, auf ihrem Definitionsintervall stetig. Falls die Folge $\{f_n\}$ gleichmässig gegen eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert, so gilt*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx, \tag{2.3}$$

d.h., Limesbildung und Integration lassen sich vertauschen. ◇

Beweis. Nach Satz 2.1.4 ist f wieder stetig und damit integrierbar. Nach den Rechenregeln für Riemann-Integrale gilt

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \leq (b-a)\|f_n - f\|_\infty,$$

wobei $\|\cdot\|_\infty$ die eben eingeführte Norm ist. Wegen der gleichmässigen Konvergenz gilt $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ mit $n \to \infty$, was den Satz beweist. □

2.1.10 Bemerkung. Vorsicht!! Unter punktweiser (aber *nicht gleichmässiger*) Konvergenz darf man Limesbildung und Integration nicht vertauschen. Betrachte Beispiel 2.1.3:

$$f_n(x) = \begin{cases} n - n^2|x - \frac{1}{n}| & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{2}{n}, \\ 0 & \text{falls } \frac{2}{n} < x \leq 1. \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N},\, n \geq 2)$$

Dann gilt

$$\int_0^1 f_n(x)dx = 1 \quad \forall n \geq 2, \qquad \int_0^1 [\lim f_n(x)]dx = \int_0^1 0dx = 0,$$

also gilt die Formel (2.3) nicht! ◇

2.1.11 Satz. (Vertauschung von Limesbildung und Differentiation) *Seien die Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, auf ihrem Definitionsintervall stetig differenzierbar. Falls die Folge $\{f_n\}$ punktweise gegen eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert und die Folge der Ableitungen $f_n' : [a,b] \to \mathbb{R}$ gleichmässig konvergiert, dann ist f differenzierbar und es gilt*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \quad \forall x \in [a,b], \tag{2.4}$$

d.h., Limesbildung und Differentiation lassen sich vertauschen. ◇

Beweis. Sei $\varphi = \lim f_n'$. Da die f_n' stetig sind und $\{f_n'\}$ gleichmässig konvergiert, ist φ nach Satz 2.1.4 auch stetig auf $[a,b]$. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)dt \qquad \forall x \in [a,b].$$

Nach Satz 2.1.9 gilt für jedes $x \in [a,b]$

$$\int_a^x f_n'(t)dt \to \int_a^x \varphi(t)dt \qquad \text{für } n \to \infty,$$

und es folgt wegen der punktweisen Konvergenz von $\{f_n\}$ gegen f, dass

$$f(x) = f(a) + \int_a^x \varphi(t)dt.$$

Also ist f eine Stammfunktion von φ, d.h., es gilt $f' = \varphi$. □

2.1.12 Bemerkung. Vorsicht!! Selbst wenn die Folge $\{f_n\}$ gleichmässig gegen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert, die Folge der Ableitungen $f_n' : [a,b] \to \mathbb{R}$ aber nur punktweise konvergiert, darf man Limesbildung und Differentiation nicht vertauschen. Betrachte folgendes Beispiel:

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx), \; x \in \mathbb{R} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Dann gilt offenbar $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \frac{1}{n}$, d.h., $\{f_n\}$ konvergiert gleichmässig gegen die Nullfunktion $f \equiv 0$. Die Folge der Ableitungen

$$f_n'(x) = \cos(nx)$$

konvergiert aber z.B. für $x = \frac{\pi}{2}$ gar nicht, also gilt auch die Formel (2.4) nicht! ◇

2.1.13 Satz. (Gleichmässige Konvergenz einer Funktionenreihe) *Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe positiver Zahlen a_k und $\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x)$, $x \in M \subset \mathbb{R}$, eine Funktionenreihe mit*

$$|g_k(x)| \le a_k \;\; \forall k \;\; \forall x \in M,$$

dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x)$ absolut und gleichmässig gegen eine Funktion $G : M \to \mathbb{R}$. ◇

Beweis. Zu jedem $x \in M$ konvergiert wegen $|g_k(x)| \leq a_k \ \forall k$ nach dem Majorantenkriterium die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x)$ absolut gegen einen Wert $G(x)$ und definiert so eine punktweise Grenzfunktion. Andererseits gilt

$$|G(x) - \sum_{k=0}^{n} g_k(x)| = |\sum_{k=n+1}^{\infty} g_k(x)| \leq |\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k|$$

mit $|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k| = |\sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k| \to 0$ für $n \to \infty$. □

2.1.14 Definition. Sei $a \in \mathbb{R}$ und $\{a_k\}_{k=0,1,\dots}$ eine Folge reeller Zahlen. Dann nennt man

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k \tag{2.5}$$

eine ***Potenzreihe***. Die Zahl

$$R(f) := \sup\{|x-a| \mid \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k \text{ konvergiert}\}$$

heisst *Konvergenzradius* der Potenzreihe. Das Intervall um a, in dem die Potenzreihe konvergiert, heisst *Konvergenzintervall*, d.h., ausserhalb des Konvergenzintervalls ist $f(x)$ in (2.5) nicht definiert. Der Begriff "Konvergenzintervall" wird durch den folgenden Satz motiviert. ◇

Bezeichnung:

$$B(a,r) := \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| \leq r\}.$$

2.1.15 Satz. *Die Potenzreihe*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$$

konvergiere in einem Punkt $\xi \neq a$, und es sei r eine reelle Zahl mit $0 < r < |\xi - a|$. Dann konvergiert die Potenzreihe absolut und gleichmässig auf $B(a,r)$ [1]*. Ferner gilt, dass auch die gliedweise differenzierte Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} k a_k (x-a)^{k-1}$ absolut und gleichmässig auf $B(a,r)$ konvergiert, und zwar gilt*

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k (x-a)^{k-1} \quad \forall x \in B(a,r).$$

◇

[1] d.h., wenn $x \mapsto f_k(x) = a_k(x-a)^k$ und f als Funktionen von $B(a,r)$ in $\mathbb{R}$ angesehen werden, so konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ absolut und gleichmässig gegen f.

Beweis. Seien ξ und r wie vorausgesetzt sowie $f_k(x) = a_k(x-a)^k$. Da $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(\xi)$ konvergiert, ist die Folge $\{f_k(\xi)\}$ eine Nullfolge, und es existiert also ein $c > 0$, so dass

$$|\, f_k(\xi)\,| \leq c \quad \forall k.$$

Für einen beliebigen Punkt $x \in B(a,r)$ haben wir dann mit $q = r/|\xi - a|$ (also $0 < q < 1$)

$$|f_k(x)| = |a_k(\xi-a)^k| \cdot \frac{|x-a|^k}{|\xi-a|^k} \leq |f_k(\xi)| \frac{r^k}{|\xi-a|^k} \leq cq^k.$$

Wegen $q < 1$ stehen auf der rechten Seite der Ungleichungskette die Glieder der geometrischen Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} cq^k$, die ja bekanntlich konvergiert. Damit sind die Voraussetzungen von Satz 2.1.13 erfüllt, also konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ absolut und gleichmässig auf $B(a,r)$.

Für den Beweis der zweiten Aussage nutzen wir $f_k'(x) = ka_k(x-a)^{k-1}$ aus und erhalten mit den gleichen Abschätzungen für alle x in $B(a,r)$

$$|f_k'(x)| \leq k\, c\, q^{k-1}.$$

Betrachten wir nun die Reihe $s := \sum_{k=1}^{\infty} k\, c\, q^{k-1}$ (mit positiven Gliedern) und wenden wir auf sie das Quotientenkriterium an. Es gilt unter Beachtung von $0 < q < 1$:

$$\left| \frac{(k+1)cq^k}{kcq^{k-1}} \right| \leq \frac{k+1}{k} q \leq q + \frac{1}{k} q \leq q + \frac{1-q}{2} < 1, \text{ falls } \frac{1}{k} \leq \frac{1-q}{2q}, \text{ also falls } k \geq \frac{2q}{1-q}.$$

Mit $\tau = q + (1-q)/2 = (q+1)/2$ ist das Quotientenkriterium 1.3.13 erfüllt, also ist s endlich. Damit kann wieder Satz 2.1.13 angewendet werden: die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k'$ konvergiert gleichmässig auf $B(a,r)$, und zwar nach Satz 2.1.11 gegen f'. $\square$

2.1.16 Übung. Zeigen Sie, dass die Exponentialreihe gleichmässig konvergent auf jedem Intervall $[a,b]$ ist. Nutzen Sie das aus, um zu zeigen, dass $(e^x)' = e^x$ gilt. $\diamond$

2.2 Taylorreihen

Für diesen Abschnitt empfehlen wir als Literatur *O. Forster, Analysis 1*, §22, *P. Kall, Analysis für Ökonomen*, §4.3 bzw. *K. Marti/D.Gröger, Grundkurs Mathematik*, §33.

Wir betrachten im Folgenden Funktionen $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wobei I ein (nicht auf einen Punkt entartetes) Intervall ist und gegebenenfalls die Differenzierbarkeit in einem Randpunkt von I als einseitige Differenzierbarkeit aufgefasst wird.

Wie üblich bezeichnen wir mit $f^{(k)}(x)$ $(k \geq 1)$ die k-te Ableitung von f im Punkt x und setzen $f^{(0)}(x) := f(x)$. Durch $k!$ ist k Fakultät definiert, wobei wie üblich $0! := 1$ gesetzt wird.

2.2.1 Satz. (Repetition aus der *Mathematik I*: Satz von Taylor).

Sei $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion und $a \in I$. Dann gibt es zu jedem $x \in I \setminus \{a\}$ ein ξ im offenen Intervall zwischen a und x, so dass

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \tag{2.6}$$

gilt, wobei

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad \text{und} \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

ist. ◇

Bemerkung. Den Beweis zu dieser Form des Satzes findet man in *K. Marti/D.Gröger, Grundkurs Mathematik*, auch in *P. Kall, Analysis für Ökonomen*. In *O. Forster, Analysis 1* wird zusätzlich die Stetigkeit von $f^{(n+1)}$ vorausgesetzt und benutzt, das ist aber nur der dort verwendeten Beweistechnik über den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung geschuldet. Wir erinnern daran, dass aus der Existenz von $f^{(n+1)}(x_0)$ die Stetigkeit von $f^{(n)}$ in x_0 folgt, aber natürlich noch nicht die Stetigkeit der $(n+1)$-ten Ableitungsfunktion $f^{(n+1)}$ in x_0.

2.2.2 Definition. Die Beziehung (2.6) (ebenso die unten angegebene Beziehung (2.7)) heisst *Taylor-Formel n-ter Ordnung* oder *Taylor-Entwicklung von f bis zur Ordnung n*, $P_n(x)$ heisst *n-tes Taylor-Polynom von f*, $R_n(x)$ heisst *Lagrange-Form des Restglieds der Taylor-Formel n-ter Ordnung* . ◇

2.2.3 Bemerkung. Ist $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine n-mal differenzierbare Funktion (hier muss die Existenz der $(n+1)$-ten Ableitung nicht vorausgesetzt werden) und $a \in I$, dann ist eine andere übliche Version der Taylor-Formel die Folgende, die mit dem sogenannten *Landau-Symbol* $o(\cdot)$ geschrieben wird, nämlich

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n), \quad \text{wobei } \lim_{t\to 0} \frac{o(t)}{t} = 0. \tag{2.7}$$

Wenn man die Stetigkeit von $f^{(n)}$ zusätzlich voraussetzt, folgert man das sofort für jedes $x \in I \setminus \{a\}$ aus der Taylor-Formel $(n-1)$-ter Ordnung mit Lagrange-Restglied

$$R_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n)}(\xi) - f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

da der Term

$$\frac{f^{(n)}(\xi) - f^{(n)}(a)}{n!}$$

dann – da $f^{(n)}$ stetig – gegen 0 strebt (man beachte, dass ξ von x abhängt, aber zwischen a und x liegt).

Der allgemeine Beweis ohne die Zusatzvoraussetzung findet sich z.B. im klassischen Lehrbuch von G.M. Fichtenholz, *Differential- und Integralrechnung*, unter dem Stichwort Peano-Restglied. $\diamond$

2.2.4 Definition. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar und $a \in I$. Dann heisst

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

die ***Taylorreihe*** der Funktion f im Entwicklungspunkt a (unabhängig davon, ob der Konvergenzradius grösser als 0 ist). $\diamond$

2.2.5 Bemerkungen. (i) Offenbar gilt $T(x) = f(x)$ für gegebenes x genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. (ii) Hat die oben definierte Taylorreihe den Konvergenzradius R, so konvergiert sie für jedes $0 < r < R$ (als Potenzreihe) gleichmässig auf $B(a, r)$. $\diamond$

2.2.6 Beispiel. Falls die Taylorreihe der Funktion f konvergiert, so muss sie **nicht** gegen f konvergieren. Man betrachte

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}}, & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Man kann mit etwas Mühe zeigen, dass f unendlich oft differenzierbar ist und im Nullpunkt jede Ableitung den Wert Null hat. Damit ist die Taylorreihe von f im Entwicklungspunkt 0 identisch Null, während natürlich f nicht die Nullfunktion ist.

Man vgl. *O. Forster, Analysis 1*, Beispiel (22.2). $\diamond$

2.2.7 Satz. *Seien $a \in \mathbb{R}$ und $\{b_k\} \subset \mathbb{R}$ sowie*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-a)^k$$

eine Potenzreihe mit positivem (oder unendlichem) Konvergenzradius R. Dann ist die Taylorreihe der Funktion f mit Entwicklungspunkt a, falls man sie auf den Definitionsbereich $(a - R, a + R)$ einschränkt, gleich dieser Potenzreihe und konvergiert somit gegen f $\diamond$

Beweisidee. Man wendet wiederholt die gliedweise Differentiation der Potenzreihe an und erhält präzise die Taylorreihe. $\square$

2.2.8 Taylorreihen von Standardfunktionen.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die Taylorreihen (jeweils im Entwicklungspunkt 0)

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \\
\sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\
\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \\
\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k!}
\end{aligned}
$$

Für alle $x \in (-1, 1]$ konvergiert

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$$

(wieder im Entwicklungspunkt 0), man vgl. z.B. *O. Forster, Analysis 1*, §22 bzw. *K. Marti/D.Gröger, Grundkurs Mathematik*, §33. ◇

2.2.9 Übung. Für jede der folgenden Funktionen f stelle man die Taylorreihe $T(x)$ von f im jeweiligen Entwicklungspunkt a auf:

1. $f(x) = \ln x$, $I = (0, 2]$, $a = 1$. Bitte ohne Anwendung der oben gegebenen Formel!
2. $f(x) = (1+x)^{-1}$, $a = 0$. Für welche x konvergiert die Taylorreihe $T(x)$, und für welche x gilt dann $T(x) = f(x)$?

Zusatzaufgabe: Man berechne direkt oder mit Hilfe von 1. die oben angegebene Formel für $\ln(1+x)$ und $x \in (-1, 1]$. ◇

2.3 Fourierreihen

In diesem Abschnitt geben wir eine kurze Einführung in das Thema *Fourierreihen.* Es geht dabei um die Entwicklung einer periodischen Funktion in eine Funktionenreihe mit den Termen 1, $\cos kx$ und $\sin kx$, $k \in \mathbb{N}$. Diese Funktion braucht nur stückweise stetig differenzierbar (für gewisse Konvergenzaussagen sogar nur stückweise stetig bzw. Riemann-integrierbar) zu sein, während ja die Taylor-Entwicklung zwangsläufig voraussetzt, dass die zu entwickelnde Funktion unendlich oft differenzierbar ist.

Wir beschränken uns hier auf reelle Fourierreihen und lehnen uns in der Darstellung eng an das *Lehrbuch der Analysis, Teil 2* von H. Heuser, erschienen bei Teubner, an. Andere Lehrbücher wie *O. Forster, Analysis 1* und Ansorge/Oberle (siehe Literaturverzeichnis) verwenden eine Schreibweise mit komplexen Zahlen, die aber auch dem damit wenig vertrauten Leser keine Mühe bereitet. Der Abschnitt ist folgendermassen gegliedert:

- Repetition aus der Linearen Algebra
- Periodische Funktionen, trigonometrische Polynome und Fourierreihen
- Konvergenz im quadratischen Mittel
- Punktweise und gleichmässige Konvergenz

2.3.1 Repetition: Skalarprodukt und induzierte Norm.

Ist in einem Vektorraum V zu je zwei Vektoren $\underline{v}, \underline{w} \in V$ eindeutig eine reelle Zahl $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$ mit den folgenden Eigenschaften E1 – E4 zugeordnet, so heisst $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$ ***Skalarprodukt*** oder ***inneres Produkt*** der Vektoren $\underline{v}$ und $\underline{w}$:

E1. $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \langle \underline{w}, \underline{v} \rangle$,

E2. $\langle \lambda \underline{v}, \underline{w} \rangle = \lambda \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$ für beliebige $\lambda \in \mathbb{R}$,

E3. $\langle \underline{u} + \underline{v}, \underline{w} \rangle = \langle \underline{u}, \underline{w} \rangle + \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$ für beliebige $\underline{u} \in V$,

E4. $\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle > 0$, falls $\underline{v} \neq \underline{o}$.

Wir benötigen im Folgenden den Vektorraum $V = C[-\pi, \pi]$ der auf $[-\pi, \pi]$ stetigen Funktionen. Dann ist zu $f, g \in C[-\pi, \pi]$ mittels

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx \tag{2.8}$$

ein Skalarprodukt von f und g zugeordnet. E1 gilt, da man unter dem Integral $f(x)$ und $g(x)$ vertauschen kann, E2 und E3 gelten nach den Rechengesetzen für Integrale. Zu E4: Wenn $f(x_0) \neq 0$ für mindestens ein $x_0 \in [-\pi, \pi]$ gilt, so gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$f^2(x) > 0 \quad \forall x \in [-\pi, \pi] \cap B(x_0, \varepsilon)$$

gilt, wobei $B(x_0, \varepsilon) = \{x \,|\, |x - x_0| \leq \varepsilon\}$. Wegen $f^2(x) \geq 0 \; \forall x \in [-\pi, \pi]$ folgt dann E4:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx > 0.$$

Ist V ein beliebiger Vektorraum, dann heisst eine auf V definierte reellwertige Funktion $\underline{v} \in V \mapsto \|\underline{v}\| \in \mathbb{R}$ eine ***Norm auf V*** und die Zahl $\|\underline{v}\|$ ***Norm von*** $\underline{\boldsymbol{v}}$, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

P1. $\|\underline{v}\| > 0 \quad \forall \underline{v} \in V \setminus \{\underline{o}\}$ (*Definitheit*)

P2. $\|\lambda \underline{v}\| = |\lambda| \, \|\underline{v}\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\underline{v} \in V$, (*Homogenität*)

P3. $\|\underline{v} + \underline{w}\| \le \|\underline{v}\| + \|\underline{w}\|$ für alle $\underline{v}, \underline{w} \in V$, (*Dreiecksungleichung*).

Aus P1 und P2 folgt, dass $\|\underline{v}\| = 0$ genau dann ist, wenn $\underline{v} = \underline{o}$ gilt.

Ist in V ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definiert, dann heisst für $\underline{v} \in V$

$$\|\underline{v}\| = \sqrt{\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle}$$

die ***durch das Skalarprodukt*** $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ***induzierte Norm*** von $\underline{v}$.

Sei nun wieder $V = C[-\pi, \pi]$. Zu $f, g \in C[-\pi, \pi]$ ist durch das o.g. Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx$$

die sogenannte ***L_2-Norm***

$$\|f\|_2 := \left(\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

induziert. Der Ausdruck $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 \, dx$ heisst *quadratisches Mittel* (von f auf $[-\pi, \pi]$). ◇

2.3.2 Repetition: Orthogonalität und ONS.

Ist V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, dann heissen zwei Vektoren $\underline{v} \neq \underline{o}$ und $\underline{w} \neq \underline{o}$ aus V ***orthogonal*** zueinander, falls $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = 0$ gilt. Wir schreiben dann $\underline{v} \perp \underline{w}$.

Sei $\| \cdot \|$ die durch das Skalarprodukt induzierte Norm. Eine Menge

$$\mathcal{B} = \{\underline{v}^i \,|\, i \in I\} \subset V \quad \text{mit} \quad \|\underline{v}^i\| = 1 \; \forall i \in I \quad \text{und} \quad \langle \underline{v}^i, \underline{v}^j \rangle = 0 \; \forall i, j \in I : \, i \neq j,$$

heisst ein ***Orthonormalsystem*** (kurz ***ONS***) in V.

Sei nun wieder $V = C[-\pi, \pi]$. Dann sind (für gegebenes $n \in \mathbb{N}$) in der Menge

$$\mathcal{W}(n) := \{1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx, \sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx\} \subset C[-\pi, \pi]$$

je zwei Vektoren zueinander orthogonal bezüglich des Skalarprodukts (2.8). Allgemein gilt für ganze Zahlen $\mu, \nu \geq 1$ nämlich, dass

$$\left.\begin{array}{l}
\int_{-\pi}^{\pi} \sin \mu x \ \sin \nu x dx = \begin{cases} 0, & \text{falls } \mu \neq \nu \\ \pi & \text{falls } \mu = \nu \end{cases} \\
\int_{-\pi}^{\pi} \sin \mu x \ \cos \nu x dx = 0 \\
\int_{-\pi}^{\pi} \cos \mu x \ \cos \nu x dx = \begin{cases} 0, & \text{falls } \mu \neq \nu \\ \pi & \text{falls } \mu = \nu \end{cases} \\
\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin \mu x dx = 0 \\
\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos \mu x dx = 0 \\
\int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 2\pi \,.
\end{array}\right\} \tag{2.9}$$

Wir rechnen zur Illustration das erste und dritte Integral in (2.9) für $\mu \neq \nu$ aus, die restlichen sind zur Übung empfohlen. Partielle Integration

$$\int_{-\pi}^{\pi} u'v dx = [uv]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} uv' dx :$$

liefert

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\nu x)\cos(\mu x) dx &= \left[\frac{1}{\nu}\sin(\nu x)\cos(\mu x)\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\nu}\sin(\nu x)(-\mu \sin(\mu x)) dx \\
&= 0 + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mu}{\nu}\sin(\nu x)\sin(\mu x) dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \sin(\nu x)\sin(\mu x) dx &= \left[\frac{-1}{\nu}\cos(\nu x)\sin(\mu x)\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-1}{\nu}\cos(\nu x)(\mu \cos(\mu x)) dx \\
&= 0 + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mu}{\nu}\cos(\nu x)\cos(\mu x) dx,
\end{aligned}$$

also

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\nu x)\cos(\mu x) dx = \frac{\mu}{\nu}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(\nu x)\sin(\mu x) dx = \frac{\mu}{\nu}\frac{\mu}{\nu}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\nu x)\cos(\mu x) dx.$$

Wegen $\mu \neq \nu$ folgt daraus $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\nu x)\cos(\mu x) dx = 0$, was mit der letzten Zeile auch $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(\nu x)\sin(\mu x) dx = 0$ impliziert.

Aus $\mathcal{W}(n)$ wird durch Normierung ein ONS, und zwar ist

$$\widetilde{\mathcal{W}}(n) := \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\} \ \cup \ \{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx\}_{k=1}^{n} \ \subset \ C[-\pi, \pi]$$

ein ONS. ◇

2.3.3 Periodische Funktionen. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst *periodisch* mit der Periode $T > 0$, falls

$$f(x+T) = f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Dabei werden wir uns im Folgenden auf periodische Funktionen mit Periode 2π beschränken, denn eine Variablentransformation ergibt eine Funktion F mit

$$F(x) = f\left(\frac{T}{2\pi}\,x\right) \quad \text{und umgekehrt} \quad f(x) = F\left(\frac{2\pi}{T}\,x\right).$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir eine 2π-periodische Funktion f auf dem Intervall $[-\pi, \pi)$ betrachten und sie uns 2π-periodisch fortgesetzt denken.

2.3.4 Trigonometrische Polynome. Seien $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$ gegebene reelle Zahlen. Eine Funktion

$$\varphi_n(x) = \frac{\gamma_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\gamma_k \cos kx + \beta_k \sin kx), \quad x \in \mathbb{R},$$

heisst *trigonometrisches Polynom* der Ordnung n. Der Ausdruck

$$\frac{\gamma_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_k \cos kx + \beta_k \sin kx), \quad x \in \mathbb{R},$$

heisst *trigonometrische Reihe* (unabhängig davon, ob sie konvergiert oder nicht). ◇

2.3.5 Wir werden nun zeigen, dass die Koeffizienten γ_k und β_k einer trigonometrischen Reihe eine spezielle Form haben, wenn diese Reihe gleichmässig gegen eine Funktion $f(x)$ konvergiert.

Satz. Die trigonometrische Reihe

$$\frac{\gamma_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_k \cos kx + \beta_k \sin kx), \quad x \in \mathbb{R},$$

sei auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ gleichmässig konvergent gegen eine Funktion $f(x)$. Dann gilt

$$\gamma_k = a_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{2.10}$$

$$\beta_k = b_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{2.11}$$

◇

Beweis. Die Partialsummen $f_n(x) = \frac{\gamma_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\gamma_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$ sind als trigonometrische Polynome stetig auf $[-\pi, \pi]$, also ist wegen der Voraussetzung der gleichmässigen Konvergenz die Grenzfunktion f stetig auf $[-\pi, \pi]$. Da $\{f_n\}$ gleichmässig gegen f konvergiert, konvergieren für jedes feste k die Folgen $\{f_n(x) \cos kx\}$ und $\{f_n(x) \sin kx\}$ gleichmässig gegen $f(x) \cos kx$ bzw. $f(x) \sin kx$ und Limesbildung und Integration lassen sich vertauschen, also z.B.

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(x) \cos kx \; dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \; dx. \tag{2.12}$$

Wir rechnen aus (k fix)

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(x) \cos kx \; dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\gamma_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} (\gamma_\nu \cos \nu x + \beta_\nu \sin \nu x) \right) \cos kx \; dx \\ &= \frac{\gamma_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \; dx \\ &\quad + \sum_{\nu=1}^{n} \left(\gamma_\nu \int_{-\pi}^{\pi} \cos \nu x \cos kx \; dx + \beta_\nu \int_{-\pi}^{\pi} \sin \nu x \cos kx \; dx \right), \end{aligned}$$

was nach (2.12) und (2.9)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \; dx = \begin{cases} \gamma_0 \pi & \text{falls } k = 0, \\ \gamma_k \pi & \text{falls } k > 0, \end{cases}$$

ergibt. Analog folgt $\beta_k = b_k$ für $k \in \mathbb{N}$. □

2.3.6 Leider gilt die Umkehrung des Satzes nicht: Ist eine periodische Funktion f stetig, so ist die trigonometrische Reihe (d.i. ihre *Fourierreihe*) $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^\infty (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ nicht punktweise, geschweige denn gleichmässig konvergent.

Es ist aber nicht so einfach, ein Gegenbeispiel anzugeben, seine Diskussion erfordert etwas Aufwand, vgl. z.B. Fichtenholz, *Differential- und Integralrechnung, Teil 3*, Stichwort *Singularitäten von Fourierreihen.* P. du Bois-Reymond (1876) gab erstmals das Beispiel einer stetigen Funktion an, deren Fourierreihe nicht in allen Punkten konvergiert. H. Lebesgue (1906) gab das Beispiel einer stetigen Funktion an, die zwar punktweise, aber nicht gleichmässig konvergiert.

A.N. Kolmogorov (1926) zeigte für eine spezielle Lebesgue-integrierbare Funktion, dass ihre Fourierreihe überall divergent ist. Es war lange unklar, ob es nicht sogar eine spezielle stetige Funktion gibt, die das gleiche Verhalten zeigt.

Erst 1966 bewies C. Carleson, dass das bei stetigen Funktionen nicht sein kann: sie haben stets eine "fast überall" (bedeutet hier: bis auf eine Menge vom Masse 0) punktweise konvergente Fourierreihe. ◇

2.3.7 Definition. Sei f eine 2π-periodische Funktion, die auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ Riemann-integrierbar [2] ist. Sind a_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ und b_k $(k = 1, 2, \ldots)$ die Zahlen aus (2.10) und (2.11), so heissen sie *Fourierkoeffizienten* zu f und die trigonometrische Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

heisst ***Fourierreihe zu f***, wir drücken das symbolisch aus durch

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

was offen lässt, ob bzw. in welchem Sinne die Reihe konvergiert. ◇

2.3.8 Fourierkoeffizienten bei Periodenlänge T. Sei $T > 0$. Ist f eine T-periodische, auf $[0, T]$ Riemann-integrierbare Funktion, so modifizieren sich die Fourierkoeffizienten zu f wie folgt:

$$\tilde{a}_k := \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(k\omega x)\,dx \quad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{2.13}$$

$$\tilde{b}_k := \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(k\omega x)\,dx \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{2.14}$$

Dabei ist $\omega = (2\pi)/T$, die sogenannte *Kreisfrequenz.* ◇

2.3.9 Übung. Sei f auf $[-\pi, \pi]$ Riemann-integrierbar und dort gerade oder ungerade. Man zeige, dass in der Fourierreihe von f dann $b_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, gilt, falls f gerade ist sowie $a_k = 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, gilt, falls f ungerade ist. ◇

In der Vorlesung werden wir die Begriffe *Periodische Funktion* und *Fourierreihe* graphisch illustrieren.

2.3.10 Beispiele.

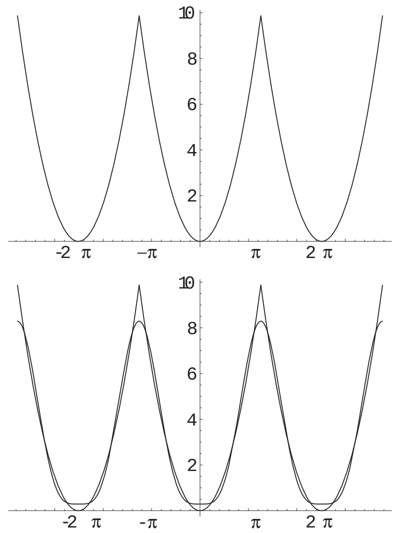
Beispiel 1: Sei $f(x) = x^2$, $x \in [-\pi, \pi)$, mit 2π-periodischer Fortsetzung. Die Funktion ist gerade, also gilt $b_k = 0$ für alle k, und man rechnet aus: $a_0 = (2/3)\pi^2$ sowie

$$a_k = (-1)^k \frac{4}{k^2}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Die Fourierreihe ist also

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} - \frac{4\cos x}{1^2} + \frac{4\cos 2x}{2^2} - + \ldots$$

[2] d.h., f ist beschränkt und das Riemann-Integral von f existiert über $[-\pi, \pi]$



Approximation durch Fourierreihe

Beispiel 2: Betrachte die Sägezahnfunktion

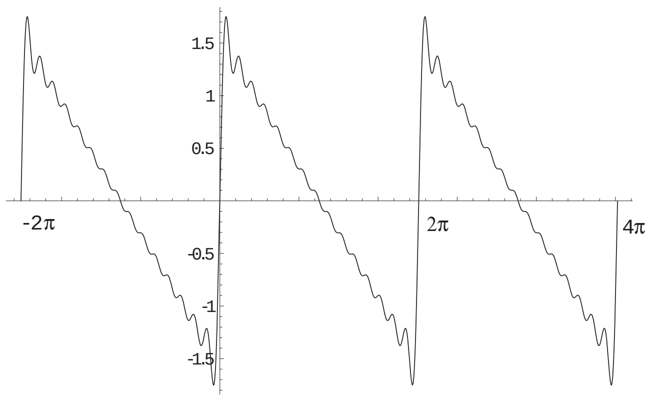
$$g(x) = \begin{cases} -x, & \text{falls } x \in (-\pi, \pi) \\ 0 & \text{falls } x = -\pi, \end{cases}$$

mit 2π-periodischer Fortsetzung. Diese Funktion ist ungerade, und man hat $a_k = 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, und man rechnet aus

$$b_k = (-1)^k \, \frac{2}{k}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Die Fourierreihe ist dann

$$g(x) \sim -2 \sin x + \sin 2x - (2/3) \sin 3x + - \ldots$$



Approximation durch Fourierreihe

Beispiel 3: Betrachte die Rechteckschwingung

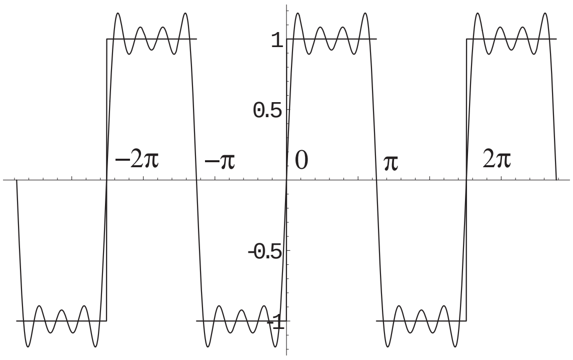
$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x = 0, \ x = \pi, \\ 1, & \text{falls } 0 < x < \pi, \\ -1, & \text{falls } \pi < x < 2\pi, \end{cases}$$

mit 2π-periodischer Fortsetzung. Es ist eine ungerade Funktion und man hat somit $a_k = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Ferner rechnet man aus

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x)\sin kx\,dx = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ \dfrac{4}{k\pi}, & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Die Fourierreihe ist dann

$$\varphi(x) \sim \frac{4}{\pi}[\sin x + (1/3)(\sin 3x) + (1/5)\sin 5x + \dots\,]$$



Approximation durch Fourierreihe

◇

2.3.11 Übung. Man nutze das Ergebnis aus Beispiel 1 in §2.3.10, um zu zeigen, dass

$$q(x) \sim \frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} \tag{2.15}$$

für die 2π-periodische Fortsetzung $q(x)$ der Funktion $x \in [-\pi, \pi) \mapsto \frac{(x+\pi)^2}{4}$ gilt. ◇

2.3.12 Lemma. *Die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\cos kx}{k^2}$ *konvergiert gleichmässig auf* $\mathbb{R}$ *gegen* $q(x) - (\pi^2/12)$ *mit* q *aus 2.3.11.* ◇

Beweis. Nach Satz 2.1.13 konvergiert die Reihe $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}$ absolut und gleichmässig gegen eine stetige Funktion $f(x)$, denn $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ist eine konvergente Reihe positiver Zahlen, die S majorisiert. Den Nachweis, dass $f(x) = q(x) - (\pi^2/12)$ ist, entnehme man *O. Forster, Analysis 1*, (21.8); vgl. auch unsere Folgerung 2.3.20 weiter unten. □

2.3.13 Übung. Man betrachte die Sägezahnfunktion

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\pi - x), & \text{falls } x \in (0, 2\pi), \\ 0 & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

mit 2π-periodischer Fortsetzung und zeige

$$h(x) \sim \sin x + (1/2)\sin 2x + (1/3)\sin 3x + \dots$$

2.3.14 Bemerkung. Die folgenden Ausführungen gelten für Funktionen, die auf $[-\pi,\pi]$ Riemann-integrierbar sind. Wir werden dabei wie oben

$$\langle f,g\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx \quad \text{und} \quad \|f\|_2 = \left(\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

verwenden, obwohl Eigenschaft E4 eines Skalarprodukts und die Eigenschaft P1 (Definitheit) einer Norm nicht mehr gelten.

Z.B. hat ja auch die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die L_2-Norm $\|f\|_2 = 0$. Wir werden nur die Axiome E1, E2 und E3 eines Skalarprodukts und die daraus abgeleiteten Eigenschaften für $\|\cdot\|_2$ anwenden. ◇

2.3.15 Satz. *Sei f 2π-periodisch und auf $[-\pi,\pi]$ Riemann-integrierbar. Dann gilt für die n-te Partialsumme*

$$f_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k \sin kx)$$

der Fourierreihe zu f die Gleichung

$$\|f-f_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right].$$

Ferner gilt die Besselsche Ungleichung

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2) \le \frac{1}{\pi}\|f\|_2^2,$$

folglich sind die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2$ konvergent und es gilt insbesondere $a_k \to 0$ und $b_k \to 0$ für $k \to \infty$. ◇

Beweis. Wir benutzen die Ergebnisse und die Schreibweise aus Abschnitt 2.3.1 mit

$$u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ u_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx,\ v_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx\ (k>0).$$

Dann gilt

$$f_n = \langle f,u_0\rangle u_0 + \sum_{k=1}^{n}\langle f,u_k\rangle u_k + \sum_{k=1}^{n}\langle f,v_k\rangle v_k$$

und

$$\|f-f_n\|_2^2 = \langle f-f_n, f-f_n\rangle = \|f\|_2^2 - 2\langle f,f_n\rangle + \langle f_n,f_n\rangle. \tag{2.16}$$

Nach Definition der Fourierkoeffizienten gilt aber

$$\begin{aligned} \langle f, u_0 \rangle^2 &= \tfrac{1}{2}\pi a_0^2 \\ \langle f, u_k \rangle^2 &= \pi a_k^2 \\ \langle f, v_k \rangle^2 &= \pi b_k^2, \end{aligned}$$

also

$$\langle f, f_n \rangle = \langle f, u_0 \rangle^2 + \sum_{k=1}^{n} (\, \langle f, u_k \rangle^2 + \langle f, v_k \rangle^2 \,) = \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \right]. \tag{2.17}$$

Da $\{u_0, u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n\}$ ein ONS ist, fallen alle Skalarprodukte zwischen Elementen des ONS bei "gemischten" Termen weg, und die mit gleichem Term sind gleich 1. Somit folgt

$$\langle f_n, f_n \rangle = \langle f, u_0 \rangle^2 + \sum_{k=1}^{n} (\, \langle f, u_k \rangle^2 + \langle f, v_k \rangle^2 \,) = \langle f, f_n \rangle,$$

was mit (2.16) und (2.17) auf

$$\|f - f_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \right]$$

führt. Damit ist die behauptete Gleichung bewiesen, und die Besselsche Ungleichung folgt mittels Umstellen und wegen $-\|f - f_n\|_2^2 \leq 0$ nach Grenzübergang. □

2.3.16 Definition. Seien f und f_n, $n \in \mathbb{N}$, 2π-periodische, auf $[-\pi, \pi]$ Riemann-integrierbare Funktionen. Man sagt, dass die Folge $\{f_n\}$ *im quadratischen Mittel gegen f konvergiert*, falls $\lim \|f - f_n\|_2 = 0$, d.h., äquivalent

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x) - f(x)|^2 dx \;\to\; 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Gleichmässige Konvergenz impliziert Konvergenz im quadratischen Mittel, letztere zieht aber nicht einmal punktweise Konvergenz nach sich. ◇

2.3.17 Folgerung. Aus der Besselschen Ungleichung folgt sofort, dass unter den Voraussetzungen von Satz 2.3.15 die Fourierreihe von f genau dann im quadratischen Mittel gegen f konvergiert, wenn

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \|f\|_2^2$$

gilt. ◇

2.3.18 Lemma. *Seien f und g 2π-periodische Funktionen, die auf $[-\pi,\pi)$ wie folgt als spezielle Treppenfunktionen definiert sind:*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \textit{falls } a \leq x \leq 0, \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1, & \textit{falls } 0 \leq x \leq b, \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases},$$

wobei $a \in [-\pi, 0)$ und $b \in (0,\pi)$ gegebene Konstanten sind. Dann konvergieren die Fourierreihen von f bzw. g im quadratischen Mittel gegen f bzw. g. ◇

Beweis. Wir führen den Beweis für f, für g ist der Beweis analog.

Nach der vorhergehenden Folgerung müssen wir zeigen, dass die Besselsche Ungleichung als Gleichung erfüllt ist. Wir rechnen aus ($k \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\|f\|_2^2 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x)^2\,dx = \frac{1}{\pi}\int_a^0 dx = -\frac{a}{\pi}, \\ a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_a^0 dx = -\frac{a}{\pi}, \\ a_k &= \frac{1}{\pi}\int_a^0 \cos kx\,dx = -\frac{\sin ka}{k\pi}, \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_a^0 \sin kx\,dx = \frac{\cos ka - 1}{k\pi}. \end{aligned}$$

Daraus folgt für $k \geq 1$

$$a_k^2 + b_k^2 = \frac{1}{k^2\pi^2}[\sin^2 ka + (\cos ka - 1)^2] = \frac{1}{k^2\pi^2}[1 - 2\cos ka + 1] = \frac{2}{k^2\pi^2}[1 - \cos ka]$$

Nach Lemma 2.3.12 gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos ka}{k^2} = \frac{(a+\pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12},$$

was – bei Wahl von $a = 0$ – speziell $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k^2) = (\pi^2)/6$ ergibt. Insgesamt folgt

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{a^2}{2\pi^2} + \frac{2}{\pi^2}\left[\frac{\pi^2}{6} - \frac{(a+\pi)^2}{4} + \frac{\pi^2}{12}\right] = -\frac{a}{\pi} = \frac{1}{\pi}\|f\|_2^2$$

(nachrechnen!), womit die Besselsche Ungleichung als Gleichung erfüllt ist - was zu zeigen war. □

2.3.19 Satz. (Konvergenz im quadratischen Mittel)
Sei f eine 2π-periodische Funktion, die auf $[-\pi,\pi]$ Riemann-integrierbar ist. Dann konvergiert die Fourierreihe von f im quadratischen Mittel gegen f, und es gilt die Vollständigkeitsrelation

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2\,dx.$$

◇

Beweisidee. Man benutzt, dass eine (periodische) Riemann-integrierbare Funktion von oben und unten durch (periodische) Treppenfunktionen approximiert werden kann, was der Obersumme und Untersumme in der Definition des Riemann-Integrals entspricht. Andererseits lässt sich jede periodische Treppenfunktion als endliche Linearkombination von Funktionen vom Typ der speziellen Treppenfunktionen aus Lemma 2.3.18 darstellen. Man zeigt dann leicht mit Hilfe dieser Tatsache und Satz 2.3.15, dass die Besselsche Ungleichung für f in eine Gleichung übergeht. Für Details sei auf *O. Forster, Analysis 1*, Beweis von Satz 2 in §23, verwiesen. □

2.3.20 Folgerung. Sind f und g zwei stetige 2π-periodische Funktionen. Wenn f und g die gleichen Fourierreihen haben, so gilt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. ◇

Beweis. Nach dem vorigen Satz konvergieren beide Fourierreihen im quadratischen Mittel gegen die jeweilige Funktion. Wir fassen f und g als Elemente des Vektorraums $C[-\pi, \pi]$ der auf $[-\pi, \pi]$ stetigen Funktionen mit der Norm $\|\cdot\|_2$ auf (die dann 2π-periodisch fortgesetzt sind). Damit gilt für die n-te Partialsumme f_n der gemeinsamen Fourierreihe nach Dreiecksungleichung für $\|\cdot\|_2$

$$\|f - g\|_2 = \|f - f_n + f_n - g\|_2 \leq \|f - f_n\|_2 + \|g - f_n\|_2 \to 0 \quad (n \to \infty),$$

also $\|f - g\|_2 = 0$. Da $\|\cdot\|_2$ eine Norm in $C[-\pi, \pi]$ ist, folgt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in [-\pi, \pi]$ und sogar für alle reellen x wegen der Periodizität. □

2.3.21 Satz. (Punktweise und gleichmässige Konvergenz)
Sei f 2π-periodisch und auf $[-\pi, \pi]$ stückweise stetig differenzierbar, d.h., es existieren eine Zerlegung $-\pi = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = \pi$ des Intervalls $[-\pi, \pi]$ sowie für jedes $i \in \{1, \ldots, m\}$ eine auf dem Intervall $[x_{i-1}, x_i]$ stetig differenzierbare Funktion f_i mit $f(x) = f_i(x)$ für $x \in (x_{i-1}, x_i)$. Dann gelten die folgenden Aussagen für die Fourierreihe von f:

1. *Die Reihe konvergiert punktweise gegen f, wobei in Unstetigkeitsstellen x*
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \tfrac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$$
gilt. Dabei bedeuten $f(x^+)$ und $f(x^-)$ den rechtsseitigen bzw. linksseitigen Limes von f im Punkt x.
2. *In allen beschränkten, abgeschlossenen Intervallen $[a, b]$, über denen f stetig ist, konvergiert die Reihe gleichmässig gegen f.* ◇

Den Beweis entnehme man der Literatur, z.B. *O. Forster, Analysis 1*, §23, Satz 3 und Endl/Luh *Analysis II*, Satz 4.5.2.

2.3.22 Übung. Man mache sich die Aussagen von Satz 2.3.21 anhand der Beispiele 1, 2 und 3 von § 2.3.10 klar. Zu welchem Schluss kommen Sie für die Funktionen in diesen Beispielen bezüglich des Konvergenzverhaltens ihrer Fourierreihe? ◇

Kapitel 3

Gewöhnliche Differentialgleichungen

3.1 Einführung und Beispiele

3.1.1 Zum Begriff der Differentialgleichung. Viele Gesetze in den Natur-, Wirtschafts- und Ingenieurwissenschaften können durch sogenannte *Differentialgleichungen* beschrieben werden. Darunter versteht man Gleichungen, in der unbekannte Funktionen, ihre Variablen und ihre Ableitungen (bis zu einer gewissen Ordnung) vorkommen. Häufig ist die oder eine Variable interpretierbar als die Zeit, so dass auf diese Weise auch dynamische Prozesse modelliert werden können.

Die Lösungen einer Differentialgleichung sind Funktionen, die einer geeigneten Klasse von Funktionen angehören und die den Bedingungen dieser Gleichung genügen. Sind die gesuchten Grössen dabei Funktionen *einer* reellen Variablen, so spricht man von *gewöhnlichen Differentialgleichungen*, sind es Funktionen *mehrerer* reeller Variablen (so dass die auftretenden Ableitungen partielle Ableitungen nach diesen Variablen sind), spricht man von *partiellen Differentialgleichungen*.

Kapitel 3 versteht sich als eine Einführung in Theorie und elementare Lösungsmethoden für gewöhnliche Differentialgleichungen, wobei wir uns fast ausschliesslich sogenannten *linearen Differentialgleichungen* widmen. In der Darstellung lehnen wir uns eng an die Bücher *K. Endl und W. Luh, Analysis I, AULA-Verlag Wiesbaden (1989)* und *H.H. Storrer, Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften I, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin (1999)* sowie ein früheres Skript zu unserer Vorlesung von H. Garbers, IEW, an. $\diamond$

3.1.2 Beispiel. (Bevölkerungsmodell I). Sei $N(t)$ die Grösse einer Population von Individuen (aufgefasst als differenzierbare Funktion der Zeit t). Dann ist die *Wachstumsgeschwindigkeit* gerade

$$N'(t) = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle N}{\triangle t},$$

wobei $\triangle N/\triangle t$ die mittlere Zunahme pro Zeiteinheit ist. Im einfachsten Modell nimmt man $N'(t)$ proportional zu $N(t)$ an, d.h.,

$$N'(t) = aN(t), \ a > 0, \tag{3.1}$$

wobei a etwa als die Differenz zwischen der Geburtenrate und der Sterberate aufgefasst werden kann. Mit anderen Worten: Die *Wachstumsrate* $N'(t)/N(t)$ ist konstant.

Diese Aufgabe hatten wir bereits in Kapitel 3 der Vorlesung *Lineare Algebra für Ökonomen* behandelt: Durch Einsetzen stellt man fest, dass die Funktionen

$$N(t) = \gamma e^{at}, \tag{3.2}$$

(mit beliebigem $\gamma \in \mathbb{R}$) Lösungen von (3.1) sind. Wir werden weiter unten bei der systematischen Behandlung linearer Differentialgleichungen sehen, dass es keine weiteren Lösungen gibt. Das Verhalten von N nennt man deshalb auch *exponentielles Wachstum*.

Durch Vorgabe eines *Anfangswerts* $N(t_0) = N_0$ für die Lösungen der Differentialgleichung (3.1) hat man eine sogenannte *Anfangswertaufgabe*, und in der Familie (3.1) von Lösungen ist genau eine Lösung $\widetilde{N}$ ausgezeichnet, die diese Anfangswertaufgabe löst: Es muss offenbar

$$\widetilde{N}(t) = N_0 e^{a(t-t_0)}$$

gelten. ◇

3.1.3 Beispiel. (Bevölkerungsmodell II). Exponentielles Wachstum wird unrealistisch, wenn sich die Geburten- und Sterberate und damit die Konstante a aus dem Bevölkerungsmodell I mit der Zeit ändern. Wenn man annimmt, dass die Population anfangs (nahe $t = 0$) exponentiell wächst, aber später um so langsamer wächst, je näher $N(t)$ an eine vorgegebene obere Schranke B für die Grösse der Population herankommt, ist z.B. folgendes Modell gerechtfertigt:

$$N'(t) = cN(t)(B - N(t)), \ c > 0, \, B > 0, \tag{3.3}$$

d.h., die Wachstumsrate $N'(t)/N(t)$ ist eine (monoton fallende) lineare Funktion von N. Wir werden diese Differentialgleichung am Ende von Abschnitt 3.1 mit Hilfe der Methode der Separation der Variablen lösen. Man spricht bei dieser Differentialgleichung von einem Modell des *eingeschränkten Wachstums* oder wegen der Struktur der Lösungen (als sogenannte logistische Funktion) von einem Modell des *logistischen Wachstums*. ◇

3.1.4 Beispiel. (Federschwingung). Ein Massenpunkt mit Masse $m > 0$ sei an zwei gleich langen (homogenen) Federn zwischen zwei Wänden aufgehängt. Wir betrachten die eindimensionale Schwingung mit Ortskoordinate $x(t)$ zum Zeitpunkt t. Die Federkraft F sei proportional zu x, d.h.,

$$F = -kx, \ k > 0.$$

Andererseits gilt für die Federkraft

$$F = m\ddot{x} \quad \text{(Masse mal Beschleunigung)}.$$

Hier bezeichnet, wie in der Mechanik üblich, $\ddot{x}$ die zweite Ableitung von x nach t. Somit haben wir die Differentialgleichung

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t),\ k > 0, \tag{3.4}$$

erhalten. Das ist äquivalent zu $\ddot{x}(t) = -(k/m)x(t)$. Welche Funktionen liefern nach zweimaligem Ableiten ihr Negatives? Zum Beispiel die Kosinus- und die Sinusfunktion, und so erhält man als zwei Lösungen von (3.4) (bitte überprüfen!)

$$x_1(t) = \cos\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}}\ t\right), \quad x_2(t) = \sin\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}}\ t\right).$$

Natürlich genügt dann auch jede Linearkombination

$$x(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}}\ t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}}\ t\right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

der Differentialgleichung (3.4). Wir werden weiter unten bei der systematischen Behandlung linearer Differentialgleichungen sehen, dass es keine weiteren Lösungen gibt. ◇

3.1.5 Definition. Wir werden im Folgenden die unbekannten Funktionen stets mit y, die Variablen mit x bezeichnen. Sei $n \in \mathbb{N}$ und Φ eine Funktion von $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ in $\mathbb{R}$. Die Beziehung

$$\Phi(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

heisst ***gewöhnliche Differentialgleichung*** (kurz: ***DGL***) n-ter Ordnung, wobei wie üblich y', ..., $y^{(n)}$ die erste bis n-te Ableitung bezeichnen. Die Differentialgleichung heisst ***explizit***, wenn sie in der Form

$$y^{(n)}(x) = \Psi(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

mit passender Funktion Ψ gegeben ist. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine n-mal stetig differenzierbare Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ heisst ***Lösung*** auf dem Intervall I, wenn für jedes $x \in I$ gilt:

- $(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) \in \mathcal{D}$ und
- $\Phi(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$.

Man sagt, dass die Lösung y an der Stelle $x_0 \in I$ einer ***Anfangsbedingung*** genügt, falls bis einschliesslich der $(n-1)$-ten Ableitung ein Wert vorgegeben ist, d.h.,

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Man spricht in diesem Falle von einer ***Anfangswertaufgabe***. ◇

3.1.6 Einordnung der Beispiele. Die Modelle der Beispiele 3.1.2 und 3.1.3 sind explizite gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung, Beispiel 3.1.4 diskutiert eine Differentialgleichung 2. Ordnung, die nach Division durch m zu einer expliziten Differentialgleichung wird. In den Beispielen 3.1.2 und 3.1.4 vermittelt die "Zusammensetzungsfunktion" Φ nur eine Linearkombination von Termen der Form y, y' bzw. y'', man spricht in diesem Falle von linearen Differentialgleichungen. In Beispiel 3.1.3 ist dagegen Φ eine Linearkombination von Termen der Form $(y)^2$ und y', das ist bereits ein Beispiel für eine nichtlineare Differentialgleichung. $\diamond$

3.1.7 Methode der Separation der Variablen (Trennung der Veränderlichen). Hier wird eine elementare Lösungsmethode vorgestellt, die sich anwenden lässt auf explizite gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung der speziellen Form

$$y' = f(x) \cdot g(y), \quad g(y) \neq 0, \tag{3.5}$$

wobei $f : I_1 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : I_2 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf offenen Intervallen I_1 bzw. I_2 sind. Verzichtet man auf die Voraussetzung $g(y) \neq 0$, muss man für die Nullstellen von g untersuchen, ob weitere Lösungen auftreten. Wir schliessen diesen Fall aus.

Wir geben zunächst die Methode an, rechnen dann ein kleines Beispiel und begründen anschliessend die Methode.

S0. Bringe, falls notwendig und möglich, eine gegebene DGL auf die Form $y' = f(x)g(y)$, in formaler Schreibweise
$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y).$$

S1. Stelle "in Gedanken" formal um
$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

S2. Bilde auf beiden Seiten das unbestimmte Integral
$$G(y) := \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C =: F(x) + C.$$

S3. Löse die implizite Gleichung $G(y) = F(x) + C$ (wenn möglich) nach y auf.

Wir demonstrieren die Methode an dem einfachen Beispiel
$$y' = \frac{y}{x}, \quad x > 0, \; y > 0.$$

S0 entfällt, S1 ergibt formal
$$\frac{dy}{y} = \frac{1}{x}dx.$$

In S2 berechne auf beiden Seiten Stammfunktionen

$$G(y) = \ln y, \quad F(x) = \ln x.$$

In S3 löse auf (Konstante C nicht vergessen!)

$$G(y) = F(x) + C, \quad \text{d.h.,} \quad \ln y = \ln x + C,$$

also hat wegen $\ln y - \ln x = \ln(y/x)$ jede Lösung der DGL die Form $y(x) = e^C x$, also

$$y(x) = cx, \quad x > 0,$$

wobei $c > 0$ beliebig ist. Ist zusätzlich ein Anfangswert $y(1) = 2$ vorgegeben, berechnet sich $c = 2/1 = 2$, also ergibt sich dazu die eindeutige Lösung der DGL $\tilde{y}(x) = 2x$, $x > 0$, unter der gegebenen Anfangsbedingung.

Zur Begründung der Methode zeigen wir, dass bei Vorgabe eines Punktes $(x_0, y_0) \in I_1 \times I_2$ mit $y_0 = f(x_0)$ eine Umgebung U von x_0 und eine auf U stetig differenzierbare Funktion $y = y(x)$ existieren, so dass dort $y'(x) = f(x)g(y(x))$ gilt.

Die Funktionen

$$G(y) := \int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{g(\eta)}, \; y \in I_2, \quad F(x) := \int_{x_0}^{x} f(\xi) d\xi, \; x \in I_1,$$

sind Stammfunktionen von $1/g$ bzw. f. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung sind sie auf ihren Definitionsintervallen differenzierbar, und es gilt

$$F'(x) = f(x) \quad \text{und} \quad G'(y) = \frac{1}{g(y)}.$$

Folglich sind die Ableitungen F' und G' auch *stetig*, da f und g stetig.

Wegen $g(y) \neq 0$ auf ganz I_2, muss g und somit auch G' überall das gleiche Vorzeichen haben, also ist G streng monoton, überdies auch stetig. Dann ist das Bild $G(I_2)$ also ein offenes Intervall. Wegen $F(x_0) = G(y_0) = 0$ folgt $F(x_0) \in G(I_2)$ und somit sogar (da F stetig) $F(x) \in G(I_2)$ für x aus einer offenen Umgebung U von x_0. Da G streng monoton ist, ist G bijektiv als Funktion von $F(U)$ auf $G(F(U))$, wir setzen

$$y(x) = G^{-1}(F(x)), \quad x \in U. \tag{3.6}$$

F und G (somit auch G^{-1}) sind *stetig* differenzierbar, also ist es auch y.

Nach Konstruktion gilt

$$G(y(x)) = F(x), \quad x \in U, \tag{3.7}$$

Differentiation nach x auf beiden Seiten gibt

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x), \quad \text{d.h.,} \; y'(x) = g(y(x))f(x),$$

was zu beweisen war. Integration dieser Gleichung für irgendeine Lösung y liefert wieder (3.7), was wegen der Bijektivität von G gerade auf (3.6) führt, also ist y (bei Vorgabe von $y_0 = f(x_0)$) sogar lokal eindeutig. ◇

3.1.8 Übung. Man löse die Differentialgleichung (3.3) aus dem Bevölkerungsmodell II, d.h.,

$$N'(t) = cN(t)(B - N(t)),\ c > 0,\ B > 0,$$

für den Anfangswert $N(t_0) = N_0$ mit Hilfe der Methode der Separation der Variablen.

Hinweise: Setze $y := N$, $x := t$, $f(x) = -c$, $g(y) = -y(B - y)$ und nutze nach Division durch $g(y)$ (bei $g(y) \neq 0$) die sogenannte Partialbruchzerlegung (nachrechnen!)

$$-\frac{1}{y(B-y)} = \frac{1}{B}\left(\frac{1}{y-B} - \frac{1}{y}\right)$$

aus. Die allgemeine Lösung unserer DGL $y' = cy(B - y)$ (abgesehen von den trivialen Lösungen $y \equiv 0$ und $y \equiv B$) lautet dann mit einer Integrationskonstanten K (wir nehmen K statt C wegen möglicher Konfusion mit dem Proportionalitätsfaktor c)

$$y(x) = \frac{B}{1 + Ke^{-cBx}}.$$

Eine Funktion dieses Typs heisst *logistische Funktion.* Nach Zurückübersetzung in die Symbolik $N(t)$ und Ausrechnen der Konstante K mittels $N(t_0) = N_0$ lautet das Ergebnis der Anfangswertaufgabe

$$N(t) = \frac{BN_0}{N_0 + (B - N_0)e^{-cB(t-t_0)}}.$$

◇

3.2 Lineare Differentialgleichungen

3.2.1 Grundlagen

3.2.1 Definition. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall und seien $f, a_i : I \to \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, stetige Funktionen. Dann heisst

$$L(y) := y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = f(x)$$

eine (explizite) ***lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung***.

Als *Lösung* dieser linearen DGL n-ter Ordnung bezeichnet man
eine auf I n-mal differenzierbare Funktion $y : I \to \mathbb{R}$,
die $L(y(x)) = f(x)$ für alle $x \in I$ erfüllt.

Nach Voraussetzung ist die n-te Ableitung $y^{(n)}(\cdot)$ der Lösung y damit auch stetig.

Als *allgemeine Lösung* einer linearen DGL n-ter Ordnung bezeichnen wir ein beliebiges Element aus der Menge aller Lösungen dieser DGL, analog zur Theorie linearer Gleichungssysteme.

Für $f(x) \equiv 0$ spricht man von einer *homogenen* linearen DGL n-ter Ordnung, im anderen Falle von einer *inhomogenen* linearen DGL n-ter Ordnung. ◇

3.2.2 Satz. (Existenz- und Eindeutigkeitssatz). *Sei*

$$L(y) := y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = f(x)$$

eine lineare DGL n-ter Ordnung unter beliebig gegebenen Anfangsbedingungen

$$x_0 \in I,\ y(x_0) = y_0,\ y^{(i)}(x_0) = y_i,\ i = 1, \ldots, n-1.$$

Dann existiert auf I genau eine Lösung dieser DGL, die den Anfangsbedingungen genügt. Es gibt auch auf Teilintervallen von I, die x_0 enthalten, keine andere Lösung dieser DGL unter den gegebenen Anfangsbedingungen.[1] ◇

Beweis. Vgl. z.B. *O. Forster, Analysis 2*, Abschnitt 12, Satz 1. Dieser Beweis ist recht aufwendig, setzt das Verständnis von Abschnitt 10 in *O. Forster, Analysis 2* voraus und sollte erst am Ende des Semesters (z.B. in der Semesterpause) nachgelesen werden. □

3.2.3 Satz. *Die allgemeine Lösung y der inhomogenen linearen DGL n-ter Ordnung $L(y) = f(x)$ ist von der Form*

$$y(x) = y^*(x) + \eta(x),$$

wobei y^* eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL $L(y) = f(x)$ und η die allgemeine Lösung der homogenen DGL $L(\eta) = 0$ ist. ◇

Beweis. Wegen der linearen Gestalt von L folgt aus $L(y^*) = f(x)$ und $L(\eta) = 0$ sofort (nachdenken, warum!!)

$$L(y^* + \eta) = L(y^*) + L(\eta) = f(x).$$

Umgekehrt: Ist y irgendeine Lösung von $L(y) = f(x)$ und y^* eine spezielle Lösung dieser Gleichung, folgt sofort

$$L(y - y^*) = L(y) - L(y^*) = f(x) - f(x) = 0,$$

also löst $\eta := y - y^*$ die homogene DGL $L(\eta) = 0$, und es ist $y = y^* + \eta$. □

3.2.4 Beispiel. In den Beispielen 3.1.2 und 3.1.4 traten homogene lineare DGLen 1. bzw. 2. Ordnung auf. Wir hatten mit den dort angegebenen Lösungen jeweils die allgemeine Lösung der betreffenden DGL angegeben.

Im Beispiel 3.1.2 bestand diese aus allen Vielfachen einer gewissen Exponentialfunktion, zum Beweis, dass das alle Lösungen sind, vgl. Abschnitt 3.2.2.

Im Beispiel 3.1.4 bildeten die folgenden Funktionen (wir nennen die Variable jetzt x statt t) ein Lösungssystem:

$$\{\cos\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}}\, x\right),\ \ \sin\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}}\, x\right)\}. \tag{3.8}$$

Es handelt sich um ein sogenanntes *Fundamentalsystem* von Lösungen der DGL (wir definieren das in Abschnitt 3.2.3): die allgemeine Lösung ist eine beliebige Linearkombinationen der beiden Funktionen. ◇

[1] Es ist also keine Einschränkung der Allgemeinheit, von vornherein nur Lösungen zu betrachten, die auf ganz I definiert sind. Das ist übrigens ein Spezifikum *linearer* DGLen!

3.2.2 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

3.2.5 Homogene lineare DGLen 1. Ordnung. Wir betrachten für $x \in I$ die homogene lineare DGL 1. Ordnung.

$$y' + p(x)y = 0 \tag{3.9}$$

mit einer auf dem Intervall I stetigen Funktion p. Sei P eine Stammfunktion von p, dann sieht man sofort durch Differentiation, dass

$$y(x) = ce^{-P(x)} \quad (c \in \mathbb{R} \text{ beliebig}) \tag{3.10}$$

eine Lösung ist. Gibt man sich für beliebiges $x_0 \in I$ einen Anfangswert $c_0 \in \mathbb{R}$ vor, so berechnet man

$$c_0 = y(x_0) = ce^{-P(x_0)} \quad \Rightarrow \quad c = c_0 e^{P(x_0)},$$

d.h., $\bar{y}(x) = c_0 e^{P(x_0)} e^{-P(x)}$ ist Lösung der Anfangswertaufgabe. Diese ist nach Satz 3.2.2 eindeutig bestimmt, also hat man durch (3.10) alle Lösungen beschrieben. $\diamond$

3.2.6 Beweis der Eindeutigkeit (fakultativ). Im vorigen Punkt wurde Satz 3.2.2 benutzt, um die Eindeutigkeit der Lösung der Anfangswertaufgabe zu zeigen. Das kann man im Spezialfall der DGL (3.9) auch direkt tun.

Es seien $x_0 \in I$, $c_0 \in \mathbb{R}$ gegeben und y, η zwei Lösungen von (3.9) mit $y(x_0) = \eta(x_0) = c_0$. Dann gilt für alle $x \in I$

$$y'(x) + p(x)y(x) = \eta'(x) + p(x)\eta(x),$$

folglich $y' - \eta' = p(x)(\eta - y)$ und somit nach den Regeln der Integralrechnung und unter Verwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x} p(t)[\eta(t) - y(t)]dt &= \int_{x_0}^{x} [y'(t) - \eta'(t)]dt \\ &= y(x) - \eta(x) - c_0 + c_0 \\ &= y(x) - \eta(x). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Sei $I_1 \subset I$ ein (nicht zu einem Punkt entartetes) beschränktes, abgeschlossenes Intervall, das x_0 enthält. Weil $t \mapsto |p(t)|$ stetig ist, ist dann nach dem Satz von Weierstrass die nichtnegative Zahl $L = \max_{t \in I_1} |p(t)|$ wohldefiniert. Sei x ein beliebiger Punkt mit

$$x \in I_1 \quad \text{und} \quad L|x - x_0| < 1.$$

Wir bezeichnen mit $\overline{x_0 x}$ die abgeschlossene Verbindungsstrecke zwischen x_0 und x. Dann folgt mit $\mu(x) := \max\{|\eta(t) - y(t)| \mid t \in \overline{x_0 x}\}$ (man kann "max" statt "sup" nach dem Satz von Weierstrass schreiben) aus (3.11) die Abschätzung

$$|y(x) - \eta(x)| \leq \int_{x_0}^{x} |\, p(t)[\eta(t) - y(t)] \,|\, dt \leq L\,|x - x_0|\; \mu(x).$$

Dieselbe Abschätzung kann man für $\xi \in \overline{x_0 x}$ statt für x herleiten, also gilt

$$|y(\xi) - \eta(\xi)| \le L|\xi - x_0|\mu(\xi) \quad \forall \xi \in \overline{x_0 x}. \tag{3.12}$$

Da $0 \le \mu(\xi) \le \mu(x)$ und $|\xi - x_0| \le |x - x_0|$ für alle $\xi \in \overline{x_0 x}$ gilt, kann man in (3.12) links und rechts zum Maximum bezüglich $\xi \in \overline{x_0 x}$ übergehen, das ergibt

$$\mu(x) \le L|x - x_0|\mu(x), \quad \text{folglich } (1 - L|x - x_0|)\mu(x) \le 0, \quad \text{also } \mu(x) \le 0,$$

da $1 - L|x - x_0| > 0$. Somit

$$\mu(x) = 0.$$

Wir haben also gezeigt, dass $y(x) = \eta(x)$ für alle x in einem (nicht entarteten) Intervall gilt, das x_0 enthält.

Sei nun $J \subset I$ das grösste Intervall, das x_0 enthält und in dem $y(x) = \eta(x)$ $(\forall x \in J)$ gilt. Da y und η stetig sind, ist J abgeschlossen (es kann gegebenenfalls unbeschränkt sein), vgl. Übung 1.1.15. Wenn es nicht mit I zusammenfällt, liegt ein Intervallende $x_1 \in J$ im Inneren von I und wir können die obigen Schlüsse für x_1 statt x_0 wiederholen. Wir erhalten so die Aussage $y(x) = \eta(x)$ auch für $x \in I$ mit $x_1 - \varepsilon < x < x_1 + \varepsilon$ (mit einem gewissen $\varepsilon > 0$) - im Widerspruch dazu, dass J bereits das grösste derartige Intervall sein sollte. Also ist $J = I$, was zu zeigen war. □

3.2.7 Inhomogene lineare DGLen 1. Ordnung. Wir betrachten für $x \in I$ die DGL

$$y' + p(x)y = f(x) \tag{3.13}$$

mit auf dem Intervall I stetigen Funktionen p und f. Sei P wieder eine Stammfunktion von p. Die allgemeine Lösung dieser DGL hat nach Satz 3.2.3 und dem vorigen Punkt die Form

$$y^*(x) \;+\; ce^{-P(x)}, \; c \in \mathbb{R} \;\text{ beliebig}, \tag{3.14}$$

wobei y^* eine spezielle Lösung von (3.13) ist. Diese bestimmen wir nach der Methode der *Variation der Konstanten* mit dem Ansatz

$$y^*(x) = c(x)\eta(x),$$

wobei $c(x)$ eine unbekannte, auf I differenzierbare Funktion und

$$\eta(x) = e^{-P(x)} \quad \text{(Lösung der homogenen DGL)}$$

ist. Offenbar erfüllt y^* die inhomogene DGL

$$y' + py = f, \quad \text{d.h.}, \; (c\eta)' + p(c\eta) = c(\eta' + p\eta) + c'\eta = f,$$

(unter Beachtung von $\eta' + p\eta = 0$) genau dann, wenn

$$c'\eta = f, \quad \text{also } c' = f/\eta, \text{ d.h. } c'(x) = f(x)e^{P(x)}$$

gilt. Integration liefert dann

$$c(x) = \int f(x)e^{P(x)}dx + C. \tag{3.15}$$

Mit (3.14) haben wir dann sofort eine geschlossene Darstellung für die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen DGL 1. Ordnung (3.13), nämlich (mit $c \in \mathbb{R}$ beliebig)

$$y(x) = (G(x) + c)\, e^{-P(x)}, \tag{3.16}$$

wobei G irgendeine Stammfunktion von $f(x)e^{P(x)}$ ist.

Sie können sich die Lösung (3.15) bzw. (3.16) entweder merken oder aber die vorgestellte Methode auf das jeweilige Beispiel anwenden:

S0. Stelle eine auf einem Intervall I gegebene DGL ggf. so um, dass eine DGL der folgenden Form entsteht:
$$y' + p(x)y = f(x).$$

S1. Löse die zugeordnete homogene DGL
$$y' + p(x)y = 0,$$
die allgemeine Lösung lautet mit einer Stammfunktion P von p und beliebigem $c \in \mathbb{R}$
$$\eta(x) = ce^{-P(x)}.$$

S2. Man variiere die Konstante c, d.h., man mache den Ansatz
$$y(x) = c(x)e^{-P(x)}$$
mit der unbekannten Funktion $c(x)$, um eine spezielle Lösung $y^* = y$ zu erzeugen.

S3. Man setze den Ansatz aus S2 in die inhomogene DGL ein und erhält nach einigen Umformungen eine Beziehung für $c'(x)$. Integration liefert die Lösung.

$\diamond$

3.2.8 Beispiel. Man löse auf $I = (0, +\infty)$ die DGL

$$xy' + y = x + x^2.$$

Nach Division durch x führt das auf die benötigte explizite Form

$$y' + \frac{1}{x}y = 1 + x. \tag{3.17}$$

Die Funktion $p(x) = 1/x$ hat auf I als eine Stammfunktion $P(x) = \ln x$. Die zugeordnete homogene DGL hat also als eine Lösung

$$\eta(x) = e^{-P(x)} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}.$$

Der Ansatz mit Variation der Konstanten zur Ermittlung einer speziellen Lösung y^* lautet

$$y(x) = c(x)\frac{1}{x}.$$

Einsetzen in die explizite inhomogene DGL (3.17) liefert

$$1 + x = y' + \frac{1}{x}y = c'(x)\frac{1}{x} - c(x)\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}c(x)\frac{1}{x} = c'(x)\frac{1}{x},$$

also

$$c'(x) = (1+x)x = x + x^2, \quad \text{d.h. eine Stammfunktion ist } c(x) = \tfrac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

Die allgemeine Lösung der gegebenen DGL lautet also

$$y(x) = \tfrac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + c\frac{1}{x}, \quad c \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$

Interessiert man sich z.B. für die eindeutige Lösung y^* durch $(x_0, y_0) = (1, 0)$, also $y(1) = 0$, so muss man lösen

$$0 = y(1) = \tfrac{1}{2} + \frac{1}{3} + c \cdot 1,$$

das ergibt $c = -5/6$ und somit

$$y^*(x) = \tfrac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6x}.$$

◇

3.2.9 Übung. Man bestimme auf $I = \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der DGL

$$y' + y = x + 1.$$

Geben Sie die spezielle Lösung an, die der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ genügt. ◇

3.2.10 Übung. Man bestimme auf $I = (0, +\infty)$ die allgemeine Lösung der DGL

$$xy' + 2y = 4x^2.$$

Geben Sie die spezielle Lösung an, die der Anfangsbedingung $y(1) = 1$ genügt. ◇

3.2.3 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung

3.2.11 Definition. Wir betrachten die explizite homogene Differentialgleichung 2. Ordnung auf einem Intervall I

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{3.18}$$

wobei p und q als stetig auf I vorausgesetzt sind.

Eine endliche Menge Y von (zweimal stetig differenzierbaren) Lösungen $y : I \to \mathbb{R}$ der homogenen DGL (3.18) heisst ***Fundamentalsystem*** von Lösungen dieser DGL, falls sich jede Lösung von (3.18) als Linearkombinationen von Elementen aus Y darstellen lässt und Y eine minimale derartige Menge ist (minimal bezüglich der Anzahl der Elemente).

In Analogie zur linearen Algebra kann man auch sagen: Y ist ein minimales Erzeugendensystem der Lösungsmenge der DGL (3.18).

3.2.12 Satz. *Jede homogene lineare DGL 2-ter Ordnung*

$$L(y) := y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,\ x \in I, \qquad (p, q \textit{ stetig})$$

besitzt ein Fundamentalsystem von Lösungen. Jedes dieser Fundamentalsysteme besteht aus 2 Elementen. $\diamond$

3.2.13 (Lineare Unabhängigkeit). In Analogie zur linearen Algebra heissen zwei Funktionen $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}$ *linear unabhängig*, wenn für reelle Zahlen λ_1, λ_2 gilt

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) = 0\ \forall x \in I \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

gilt, andernfalls heissen sie linear abhängig.

In der Tat entspricht das der linearen Unabhängigkeit im Sinne der linearen Algebra, wenn man y_1, y_2 als Elemente des Vektorraums der über I zweimal stetig differenzierbaren Funktionen auffasst.

y_1 und y_2 sind offenbar genau dann linear abhängig, wenn ein $c \in \mathbb{R}$ existiert, so dass sich für jedes x der Wert $y_1(x)$ als c-faches von $y_2(x)$ ergibt (oder sich der Wert $y_2(x)$ als c-faches von $y_1(x)$ ergibt).

Offenbar ist ein Erzeugendensystem von Lösungen der homogenen DGL 2. Ordnung genau dann ein Fundamentalsystem, wenn es aus 2 Funktionen besteht, die linear unabhängig sind (Minimalität).

Beweis von Satz 3.2.12. Im gesamten Beweis sei $x_0 \in I$. Nach Satz 3.2.2 gibt es dann eine Lösung y_1 von $L(y) = 0$ auf I, die den Anfangsbedingungen $y_1(x_0) = 1$ und $y_1'(x_0) = 0$. Ebenso gibt es eine Lösung y_2 von $L(y) = 0$ auf I, die den Anfangsbedingungen $y_2(x_0) = 0$, und $y_2'(x_0) = 1$ genügt. Insgesamt erhalten wir ein System von Bedingungen

$$\begin{aligned} y_1(x_0) &= 1, \quad y_1'(x_0) = 0, \\ y_2(x_0) &= 0, \quad y_2'(x_0) = 1. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Wir zeigen nun, dass $B = \{y_1, y_2\}$ linear unabhängig ist, d.h., dass gilt

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0. \tag{3.20}$$

Dazu differenzieren wir Gleichung (3.20) im Punkt $x = x_0$ die Gleichung (3.20) für $x = x_0$ hinzu. Dann erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} y_1(x_0)\lambda_1 & + & y_2(x_0)\lambda_2 & = & 0 \\ y_1'(x_0)\lambda_1 & + & y_2'(x_0)\lambda_2 & = & 0. \end{array} \tag{3.21}$$

Wenn also (3.20) gilt, muss auch (3.21) erfüllt sein. Nach (3.19) ist aber die Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems (3.21) die Einheitmatrix, also folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Damit ist $B = \{y_1, y_2\}$ linear unabhängig.

Wir zeigen nun, dass B auch ein Erzeugendensystem der Lösungsmenge der DGL ist. Sei eine derartige Lösung y beliebig gegeben. Zu zeigen ist, dass es Zahlen c_1, c_2 gibt, so dass

$$y(x) = y_1(x)c_1 + y_2(x)c_2 \quad \forall x \in I \tag{3.22}$$

gilt. Dazu differenzieren wir wieder in $x = x_0$ und erhalten das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} y_1(x_0)c_1 & + & y_2(x_0)c_2 & = & y(x_0) \\ y_1'(x_0)c_1 & + & y_2'(x_0)c_2 & = & y'(x_0). \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem hat aber die Einheitsmatrix als Koeffizientenmatrix, und wir erhalten

$$c_1^* = y(x_0), \;\; c_2^* = y'(x_0)$$

als seine eindeutige Lösung. Wir bilden nun die Funktion

$$Y(x) = \sum_{j=1}^{2} c_j^* y_j(x), \;\; x \in I, \tag{3.23}$$

die als Linearkombination von Lösungen der DGL $L(y) = 0$ auch Lösung dieser DGL ist. Andererseits gilt nach Konstruktion

$$Y(x_0) = \sum_{j=1}^{2} c_j^* y_j(x_0) = c_1^* y_1(x_0) = y(x_0) \cdot 1 = y(x_0)$$

sowie

$$Y'(x_0) = \sum_{j=1}^{2} c_j^* y_j'(x_0) = c_2^* y_2'(x_0) = y'(x_0) \cdot 1 = y'(x_0),$$

also ist Y eine Lösung der DGL, die den gleichen Anfangsbedingungen wie die Lösung y genügt. Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz (Satz 3.2.2) ist dann aber $y(x) = Y(x)$ für alle x aus I und (3.23) gibt somit eine Darstellung von y mit Hilfe der Elemente aus B. Damit ist B auch ein Erzeugendensystem, folglich ein Fundamentalsystem der Lösungsmenge von $L(y) = 0$ mit n Elementen, was zu zeigen war. □

3.2.14 Beispiel. Die lineare DGL 2. Ordnung

$$y'' - y = 0$$

hat, wie man sofort sieht, die Lösungen (auf der ganzen reellen Achse)

$$y_1(x) = e^x \quad \text{und} \quad y_2(x) = e^{-x}.$$

Sie bilden ein Fundamentalsystem, denn es sind *zwei* linear unabhängige Funktionen, wie man auf folgende Weise sehen kann:

$$\lambda e^x + \mu e^{-x} = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$$

impliziert durch Einsetzen von $x = 0$ und $x = 1$

$$1 \cdot \lambda + 1 \cdot \mu = 0 \quad \text{und} \quad e \cdot \lambda + e^{-1}\mu = 0,$$

also $\lambda = \mu = 0$. Alternativ kann man aber die lineare Unabhängigkeit wie im Beweis von Satz 3.2.12 überprüfen:

$$\begin{array}{lclcll} y_1(0)\lambda & + & y_2(0)\mu & = & \lambda + \mu & = 0 \\ y_1'(0)\lambda & + & y_2'(0)\mu & = & \lambda - \mu & = 0 \end{array}$$

hat die eindeutige Lösung $\lambda = \mu = 0$. Ein Kriterium dafür ist, dass die Determinante der Koeffizientenmatrix dieses linearen Gleichungssystems

$$\begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

und damit verschieden von Null ist! Damit ist die allgemeine Lösung der gegebenen DGL: $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ ($x \in \mathbb{R}$) mit beliebigen reellen c_1, c_2. ◇

3.2.15 Übung. Geben Sie für die lineare DGL $y'' - y = 0$ in Beispiel 3.2.14 ein weiteres Fundamentalsystem von Lösungen an. (Tip: z.B. $\sinh x$ und $\cosh x$). ◇

3.2.16 Satz. *Seien y_1, y_2 Lösungen der homogenen linearen DGL n-ter Ordnung $L(y) = 0$. $B := \{y_1, y_2\}$ ist genau dann ein Fundamentalsystem von Lösungen dieser DGL, wenn für mindestens ein und somit für alle $x_0 \in I$ das System von Vektoren*

$$Z(x_0) := \left\{ \begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ y_1'(x_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2(x_0) \\ y_2'(x_0) \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^n$$

linear unabhängig ist. ◇

Die Aussage ist bemerkenswert: Um zu überprüfen, ob B ein Fundamentalsystem von Lösungen (das sind Funktionen!) ist, reicht es aus zu zeigen, dass $Z(x_0)$ (ein System von "ganz normalen Vektoren" im $\mathbb{R}^2$!) für *ein* $x_0 \in I$ linear unabhängig ist. Andererseits: Ist B ein Fundamentalsystem, so folgt die lineare Unabhängigkeit von $Z(x^0)$ *für alle* $x_0 \in I$.

Beweis von Satz 3.2.16. analog zum Beweis von Satz 3.2.12. □

3.2.17 Definition. Seien y_1, y_2 stetig differenzierbar und $x_0 \in I$. Die Determinante

$$W(y_1, y_2; x_0) \ := \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}$$

heisst ***Wronski-Determinante*** von y_1, y_n in x_0. ◇

3.2.18 Korollar. $\{y_1, y_2\}$ *ist genau dann ein Fundamentalsystem der homogenen linearen DGL 2. Ordnung $L(y) = 0$, wenn für mindestens ein und somit für alle $x_0 \in I$ die Wronski-Determinante $W(y_1, y_2; x_0)$ verschieden von Null ist.* ◇

Beweis. Folgt unmittelbar aus Satz 3.2.16 und da $W(y_1, y_2; x_0) \neq 0$ bekanntlich genau dann gilt, wenn die beiden Spalten linear unabhängig sind.. □

3.2.19 Übung. Man betrachte auf $I = (0, +\infty)$ die inhomogene lineare DGL 2. Ordnung[2]

$$L(y) := y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right) y \ = f(x)$$

mit

$$f(x) = 15 + 4x^2.$$

Man stellt durch Einsetzen fest (tun Sie das!), dass

$$y_1(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \quad \text{und} \quad y_2(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

Lösungen der homogenen DGL $L(y) = 0$ sowie

$$y^*(x) = 4x^2$$

eine spezielle Lösung von $L(y) = f(x)$ ist.

Geben Sie mit dieser Hilfestellung die allgemeine Lösung von $L(y) = f(x)$ an und begründen Sie Ihre Antwort! (Fundamentalsystem von $L(y) = 0$ bestimmen! Warum ist es eines? Formel der allgemeinen Lösung!) ◇

[2] Das ist eine sogenannte *Besselsche DGL*.

3.2.20 Übung. Man betrachte auf $I = \mathbb{R}$ die homogene lineare DGL 2. Ordnung

$$L(y) := y'' + y' = 0$$

und bestimme ihre allgemeine Lösung. Ferner ist die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL

$$y'' + y' = 2x$$

zu bestimmen. ◇

3.2.21 Satz. (Abelsche Formel) *Es seien y_1, y_2 Lösungen der homogenen linearen DGL*

$$L(y) := y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,\ x \in I, \qquad (p, q \textit{ stetig}),$$

und es sei $x_0 \in I$. Dann gilt

$$W(y_1, y_2; x) = ce^{-P(x)},$$

wobei $c = W(y_1, y_2; x_0)$ und $P(x) := \int_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi$. ◇

Beweis. Aus den Gleichungen

$$y_1'' + py_1' + qy_1 = 0 \quad \text{und} \quad y_2'' + py_2' + qy_2 = 0$$

folgt nach Multiplikation mit $-y_2$ bzw. y_1 und Addition, dass

$$(y_1y_2'' - y_1''y_2) + p(y_1y_2' - y_1'y_2) = 0. \tag{3.24}$$

Die Wronski-Determinante lautet im Vergleich dazu

$$W(x) := W(y_1, y_2; x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x),$$

also steht in der linken Klammer von (3.24) gerade $W'(x)$. Damit entspricht (3.24) der linearen homogenen DGL

$$W' + p(x)W = 0.$$

Die allgemeine Lösung dieser DGL (vgl. (3.2.5) unten) lautet

$$W(x) = ce^{-P(x)},\ c \in \mathbb{R}.$$

Mit $P(x_0) = 0$ ergibt sich dann die spezielle Wahl $c = W(x_0)$, was zu zeigen war.

3.2.22 Bestimmung eines Fundamentalsystems. Wir betrachten die explizite homogene Differentialgleichung 2. Ordnung auf einem Intervall I

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

wobei p und q als stetig auf I vorausgesetzt sind.

In diesem Falle ist es schwieriger, eine geschlossene Form der allgemeinen Lösung zu finden - abgesehen vom Fall sogenannter konstanter Koeffizienten, die im nächsten Abschnitt behandelt werden. Ist jedoch *eine* nichttriviale Lösung $y_1 \neq 0$ bereits bekannt, so erhält man mit der Formel von Abel (Satz 3.2.21) sehr leicht die allgemeine Lösung. ◇

3.2.23 Satz. *Sind p und q stetige Funktionen auf dem Intervall I und ist y_1 auf I eine Lösung der DGL*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

mit $y_1(x) \neq 0$ für alle $x \in I$, so lautet die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_1(x) \int \frac{e^{-P(x)}}{y_1^2(x)} dx, \tag{3.25}$$

wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ beliebig sind und P eine Stammfunktion von p ist. ◇

Beweis (und Methode). Sei y eine beliebige Lösung. Nach der Abelschen Formel gilt mit passendem c_2

$$W(y_1, y; x) = c_2 e^{-P(x)}.$$

Ausrechnen der Wronski-Determinante liefert also

$$W(y_1, y; x) = y_1(x)y'(x) - y_1'(x)y(x) = y_1(x)\frac{dy(x)}{dx} - y(x)\frac{dy_1(x)}{dx}$$

Division durch y_1^2 ergibt folglich

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y(x)}{y_1(x)}\right) = c_2 \frac{e^{-P(x)}}{y_1^2(x)}.$$

Integration führt letztlich auf

$$\frac{y(x)}{y_1(x)} = c_1 + c_2 \int \frac{e^{-P(x)}}{y_1^2(x)} dx,$$

was äquivalent zu (3.25) ist. Man setze $y(x)$ in die DGL ein und sieht sofort, dass es eine Lösung ist. □

3.2.24 Beispiel. Offenbar bilden

$$y_1(x) = e^{\omega x} \quad \text{und} \quad y_2(x) = e^{-\omega x}$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen der DGL auf $I = \mathbb{R}$

$$y'' - \omega^2 y = 0,$$

wobei $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Überprüfen wir die Methode aus dem vorigen Satz, indem wir y_1 als bekannt voraussetzen. Wegen $p(x) = 0$ gilt $P(x) = C$, $C \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir setzen

$$y_1 y' - y_1' y = e^{\omega x} y' - \omega e^{\omega x} y = k_1 e^{-C},$$

dividieren durch $y_1^2 = e^{2\omega x}$ und erhalten (nach Integration)

$$\frac{y}{e^{\omega x}} = k_2 + k_1 \int \frac{e^{-C}}{e^{2\omega x}} dx = k_2 + k_1 \int e^{-C-2\omega x}\, dx = k_2 + k_1 e^{-C}(-\tfrac{1}{2\omega} e^{-2\omega x} + k_3),$$

d.h.,

$$y(x) = c_1 e^{\omega x} + c_2 e^{-\omega x},$$

was zu zeigen war. $\diamond$

3.2.25 Inhomogene lineare DGLen 2. Ordnung. Wir betrachten die explizite inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung auf einem Intervall I

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$

wobei p, q und f als stetig auf I vorausgesetzt sind.

Ist $\{y_1, y_2\}$ ein Fundamentalsystem der homogenen DGL $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, dann ergibt sich eine spezielle Lösung y^* der inhomogenen DGL sofort durch

$$y^*(x) = -y_1(x) \int \frac{y_2(x)f(x)}{W(y_1, y_2; x)}\, dx + y_2(x) \int \frac{y_1(x)f(x)}{W(y_1, y_2; x)}\, dx \tag{3.26}$$

Beweis. Man ermittelt diese Formel mit der Methode der Variation der Konstanten. Ansatz für $y^* = y$

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) \quad \text{mit } c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0$$

mit unbekannten Funktionen c_1, c_2. Differenzieren liefert wegen $c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0$

$$y' = c_1'y_1 + c_2'y_2 + c_1y_1' + c_2y_2' = c_1y_1' + c_2y_2' \;\text{ und }\; y'' = c_1'y_1' + c_1y_1'' + c_2'y_2' + c_2y_2''.$$

Einsetzen von y, y', y'' in die inhomogene DGL liefert

$$c_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + c_2(y_2'' + py_2' + qy_2) + c_1'y_1' + c_2'y_2' = f(x). \tag{3.27}$$

Da die ersten beiden Klammern verschwinden, sind die Funktionen c_1' und c_2' nach folgendem linearen Gleichungssystem zu bestimmen (vgl. Zusatzbedingung im Ansatz und (3.27)):

$$\begin{aligned} y_1\, c_1' + y_2\, c_2' &= 0, \\ y_1'c_1' + y_2'c_2' &= f. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Dabei sind y_1, y_1', y_2 und y_2' die bekannten Grössen, c_1' und c_2' sind die unbekannten Grössen. Nach der Cramerschen Regel hat wegen

$$W(x) := W(y_1, y_2; x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

das lineare Gleichungssystem (3.28) die eindeutige Lösung

$$c_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}}{W(x)} = \frac{-y_2 f}{W(x)}$$

und
$$c_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix}}{W(x)} = \frac{y_1 f}{W(x)},$$
woraus nach Integration (3.26) folgt. ◇

3.2.26 Beispiel. Man betrachte auf $I = (0, \pi/2)$ die DGL
$$y'' + y' = \frac{1}{\cos x}$$
und bestimme eine spezielle Lösung y^*. Wir hatten bereits früher gesehen, dass
$$\{\sin x,\ \cos x\}$$
ein Fundamentalsystem von $y'' + y = 0$ bildet. Es gilt
$$W(\sin x, \cos x; x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1,$$
also liefert
$$y^*(x) = -\sin x \left(- \int \frac{\cos x}{\cos x} dx \right) + \cos x \left(- \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \right)$$
wegen $-\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \ln(\cos x) + C$ eine spezielle Lösung
$$y^*(x) = x \cdot \sin x + \cos x \cdot \ln(\cos x).$$
◇

3.3 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

3.3.1 Lineare DGLen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Wir beschränken uns in Abschnitt 3.3 auf DGLen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, d.h., auf DGLen der Form
$$y'' + py' + qy = f(x),$$
wobei f eine auf einem Intervall I stetige Funktion und p, q gegebene reelle Konstanten sind. Da wir im Punkt 3.2.25 eine Formel bzw. Methode kennengelernt haben, aus einem bekannten Fundamentalsystem der zugeordneten homogenen DGL eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL zu konstruieren, brauchen wir nur noch zu schauen, wie sich im hier betrachteten Spezialfall die allgemeine Lösung der homogenen DGL ergibt. ◇

3.3.2 Homogene lineare DGLen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die homogene DGL

$$y'' + py' + qy = 0$$

ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Offenbar ist für ein $r \in \mathbb{R}$

$$y(x) = e^{rx},$$

genau dann eine Lösung, wenn

$$y'' + py' + qy = e^{rx}(r^2 + pr + q) = 0,$$

d.h., wenn die quadratische Gleichung, die sogenannte ***charakteristische Gleichung***,

$$r^2 + pr + q = 0$$

eine reelle Lösung r hat. Das führt sofort auf folgende Fallunterscheidung:

Fall 1: $p^2 - 4q > 0$

Dann bilden mit

$$r_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q}$$

die Funktionen

$$y_1(x) = e^{r_1 x} \quad \text{und} \quad y_2(x) = e^{r_2 x}$$

ein Fundamentalsystem der homogenen DGL, denn für $x = 0$ ist die Wronski-Determinante

$$W(y_1, y_2; 0) = e^0 r_2 e^0 - e^0 r_1 e^0 = r_2 - r_1 \neq 0.$$

Fall 2: $p^2 - 4q = 0$

In diesem Fall bilden mit der (reellen) Doppelwurzel $r = -p/2$

$$y_1(x) = e^{rx} \quad \text{und} \quad y_2(x) = xe^{rx}$$

ein Fundamentalsystem der homogenen DGL, denn die Ableitungen lauten

$$y_1'(x) = re^{rx} \quad \text{bzw.} \quad y_2'(x) = e^{rx} + rxe^{rx},$$

d.h., für $x = 0$ ist die Wronski-Determinante

$$W(y_1, y_2; 0) = e^0 e^0 - 0 = 1.$$

Man kann die Lösung y_2 auch leicht mit der Methode von Satz 3.2.23 aus y_1 gewinnen.

Fall 3: $p^2 - 4q < 0$

In diesem Fall hat die quadratische Gleichung $r^2 + pr + q = 0$ keine reelle Lösung, sondern zwei konjugiert komplexe Lösungen

$$r = \tfrac{1}{2}(-p + i\sqrt{4q - p^2}) \;\text{ und }\; \bar{r} = \tfrac{1}{2}(-p - i\sqrt{4q - p^2}).$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise setzen wir

$$a := -\tfrac{1}{2}p \;\text{ und }\; b := \tfrac{1}{2}\sqrt{4q - p^2}.$$

In Analogie zum Fall 1 setzen wir Lösungen an als

$$\eta_1(x) = e^{rx} \;\text{ und }\; \eta_2(x) = e^{\bar{r}x}.$$

Das kann als komplexes Fundamentalsystem der homogenen DGL angesehen werden. Da wir die Theorie auf reelle Funktionen zugeschnitten haben, betrachten wir die Linearkombinationen

$$y_1(x) = \tfrac{1}{2}(e^{rx} + e^{\bar{r}x}) \;\text{ und }\; y_2(x) = \tfrac{1}{2i}(e^{rx} - e^{\bar{r}x})$$

und benutzen die Eulersche Formel $e^{iz} = \cos z + i\ \sin z$. Dann folgt

$$e^{rx} + e^{\bar{r}x} = e^{ax}[e^{ibx} + e^{-ibx}] = e^{ax}[\cos bx + i\sin bx + \cos\text{-}bx + i\sin\text{-}bx] = 2e^{ax}\cos bx,$$

$$e^{rx} - e^{\bar{r}x} = e^{ax}[e^{ibx} - e^{-ibx}] = e^{ax}[\cos bx + i\sin bx - \cos\text{-}bx - i\sin\text{-}bx] = 2ie^{ax}\sin bx.$$

Das Resultat ist mit $a := -\frac{1}{2}p$ und $b := \frac{1}{2}\sqrt{4q - p^2}$.

$$y_1(x) = e^{ax}\cos bx \;\text{ und }\; y_2(x) = e^{ax}\sin bx.$$

Das ist ein Fundamentalsystem, wie man leicht überprüft. ◇

3.3.3 Beispiel. Wir lösen nochmals mit den neuen Mitteln die DGL

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t),\ (m > 0,\ k > 0 \text{ gegeben}).$$

Das ist nach Umstellung die explizite homogene DGL 2. Ordnung

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Die zugehörige charakteristische Gleichung lautet mit $q = \frac{k}{m}$

$$r^2 + q = 0,$$

wir sind also in Fall 3. Ein Fundamentalsystem von reellen Lösungen ist somit

$$y_1(x) = \cos\sqrt{q}\,x \;\text{ und }\; y_2(x) = \sin\sqrt{q}\,x,$$

wie wir schon in Beispiel 3.1.4 "erraten" hatten. ◇

3.3.4 Beispiel. Wir betrachten die DGL

$$y'' - 2y' + y = e^x,$$

die zugeordnete homogene DGL hat die charakteristische Gleichung

$$r^2 - 2r + 1 = 0, \quad \text{d.h.}, \ r_{1,2} = 1.$$

Wir sind im Fall 2 und haben das Fundamentalsystem der homogenen DGL

$$y_1(x) = e^x \ \text{ und } \ y_2(x) = xe^x \qquad \text{mit } y_1' = e^x \text{ und } y_2' = e^x + xe^x.$$

Die Formel (3.26) zur Bestimmung einer speziellen Lösung lautet

$$y^*(x) = -y_1(x) \int \frac{y_2(x)f(x)}{W(y_1, y_2; x)}\, dx + y_2(x) \int \frac{y_1(x)f(x)}{W(y_1, y_2; x)}\, dx.$$

Es gilt $W(y_1, y_2; x) = y_1 y_2' - y_1' y_2 = e^x(e^x + xe^x) - xe^x e^x = e^{2x}$ sowie

$$y_2(x)f(x) = xe^x e^x = xe^{2x} \ \text{ und } \ y_1(x)f(x) = e^x e^x = e^{2x}$$

und somit (wir setzen unten die Integrationskonstanten gleich Null)

$$y^* = -e^x \int x dx + xe^x \int 1 dx = -e^x \tfrac{1}{2} x^2 + xe^x x = \tfrac{1}{2} x^2 e^x.$$

Die allgemeine Lösung lautet also mit c_1, c_2 beliebig

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + \tfrac{1}{2} x^2 e^x.$$

◇

Kapitel 4

Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

4.1 Grundlagen der Analysis im $\mathbb{R}^n$

In der Analysis von Funktionen in n Veränderlichen spielen Begriffe wie offene Menge, abgeschlossene Menge, Konvergenz von Punktfolgen im $\mathbb{R}^n$, kompakte Menge, stetige Funktion etc. eine wichtige Rolle. Zum Nachlesen verweisen wir vor allem auf *P. Kall, Analysis für Ökonomen*, Abschnitt 5.1.

4.1.1 Normäquivalenz im $\mathbb{R}^n$. Wir erinnern an die in der *Mathematik II* eingeführten Normen im $\mathbb{R}^n$ – dabei sei $x = (x_1, \ldots, x_n)^\mathsf{T}$ – :

euklidische Norm $\|x\|_2 = \sqrt{x^\mathsf{T} x}$,

Summennorm $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$,

Maximumnorm $\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$.

Sind nun $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ irgend zwei Normen im $\mathbb{R}^n$, so sind sie äquivalent in folgendem Sinne: Es existieren Zahlen $\alpha > 0$ und $\beta > 0$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\alpha\|x\| \le \|x\|' \le \beta\|x\|\,. \tag{4.1}$$

Zum Beispiel ist

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le \|x\|_1.$$

Man mache sich das im Falle $n = 2$ durch Aufzeichnen der abgeschlossenen Einheits"kugeln" $\{x \| \|x\|_p \le 1\}$ für $p \in \{1, 2, \infty\}$ klar.

Den Beweis von (4.1) geben wir weiter unten als Anwendung des Extremwertsatzes von Weierstrass, vgl. Punkt 4.1.19. $\diamond$

4.1.2 Definitionen. Sei $\|\cdot\|$ irgendeine Norm im $\mathbb{R}^n$ und $z \in \mathbb{R}^n$. Die Menge

$$B^\circ(z, r) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - z\| < r\} \quad (r > 0)$$

heisst ***offene Kugel*** um z mit Radius r oder ***offene r-Umgebung*** von z (bezüglich der gegebenen Norm).

Die Menge

$$B(z,r) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - z\| \leq r\} \quad (r \geq 0)$$

heisst ***abgeschlossene Kugel*** um $z \in \mathbb{R}^n$ mit Radius r (bezüglich der gegebenen Norm).

Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ heisst ***Umgebung*** von z, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $B^\circ(z,\varepsilon) \subset U$.

Ein Punkt $z \in M$ einer Teilmenge M von $\mathbb{R}^n$ heisst ***innerer Punkt von M***, falls eine Umgebung U von z existiert, die in M enthalten ist. Die Menge aller inneren Punkte von M wird mit ***int M*** bezeichnet.

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heisst ***offen***, falls alle Punkte von M innere Punkte von M sind, also falls $M = \operatorname{int} M$ gilt.

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heisst ***abgeschlossen***, falls die Komplementmenge $\mathbb{R}^n \setminus M$ offen ist.

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heisst ***beschränkt***, falls es ein $x \in \mathbb{R}^n$ und ein $r > 0$ gibt, so dass $M \subset B(x,r)$ gilt.

Bemerkungen. Der Durchschnitt und die Vereinigung endlich vieler offener Mengen sind offen, ebenso ist der Durchschnitt und die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen.

Man überlegt sich leicht, dass sogar die Vereinigung *beliebig* vieler (also auch unendlich vieler) offener Mengen wieder offen ist, ebenso ist der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen.

Die Vereinigung unendlich vieler abgeschlossener Mengen ist dagegen nicht immer abgeschlossen, man betrachte die Vereinigung der einelementigen Mengen $\{1/n\}$, $n \in \mathbb{N}$ (überlegen, warum!!). Auch der Durchschnitt unendlich vieler offener Mengen muss nicht offen sein, man betrachte den Durchschnitt der offenen Intervalle $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$, das ist offenbar die in $\mathbb{R}$ abgeschlossene (einelementige) Menge $\{0\}$. $\diamond$

4.1.3 Übung. Zeigen Sie, dass für jedes $r > 0$ die "offene" Kugel $B^\circ(z,r)$ wirklich eine offene Menge und für jedes $r \geq 0$ die "abgeschlossene" Kugel $B(z,r)$ wirklich eine abgeschlossene Menge ist. $\diamond$

4.1.4 Definition. (Konvergenz) Man sagt, die Folge $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^n$ ***konvergiert*** gegen den Punkt $a \in \mathbb{R}^n$, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ die Kugel $B^\circ(a,\varepsilon)$ fast alle Elemente der Folge $\{x_n\}$ enthält, d.h., falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n' \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$\|x_n - a\| < \varepsilon \quad \forall n \geq n'.$$

Dabei heisst a ***Limes*** oder ***Grenzelement*** der Folge $\{x_n\}$, und man schreibt

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n \,.$$

Mit anderen Worten: Die Folge $\{x_n\}$ konvergiert genau dann gegen a, wenn $\|x_n - a\| \to 0$ für $n \to \infty$. $\diamond$

4.1.5 Übung. Machen Sie sich für die Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ klar, was Konvergenz einer Punktfolge im $\mathbb{R}^n$ bedeutet. Wegen der Normäquivalenz (vgl. 4.1.1) kann man dann offenbar in jeder dieser Normen sowie jeder beliebigen Norm im $\mathbb{R}^n$ schliessen, dass $\{x^k = (x_1^k, \ldots, x_n^k)\}$ genau dann gegen $a = (a_1, \ldots, a_n)$ konvergiert, wenn $x_i^k \to a_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $k \to \infty$. $\diamond$

Nun geben wir einen Satz an, der zeigt, dass der bereits bekannte Begriff einer abgeschlossenen Teilmenge der reellen Zahlengerade (vgl. Bemerkung 1.1.14) in das jetzt benutzte Konzept passt.

4.1.6 Satz. *Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen genau dann, wenn für jede konvergente Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ ihr Limes x^* ebenfalls zu M gehört.* $\diamond$

Beweis.

(*"nur dann, wenn"-Richtung*) Sei M abgeschlossen, dann ist $\mathbb{R}^n \setminus M$ offen. Angenommen, es gibt eine Folge $\{x_n\} \subset M$ mit $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}^n \setminus M$, dann müsste x_n für grosse n auch in $\mathbb{R}^n \setminus M$ (offene Menge!) liegen - ein Widerspruch.

(*"wenn"-Richtung*) Ist M nicht abgeschlossen, dann ist $\mathbb{R}^n \setminus M$ nicht offen. Es existiert also ein $x^* \in \mathbb{R}^n \setminus M$, so dass für jedes $r > 0$ die Umgebung $B^\circ(x^*, r)$ auch Punkte von M enthält. Wähle $x^1 \in M \cap B^\circ(x^*, r_1)$ mit $r_1 = 1$, dann $x^2 \in M \cap B^\circ(x^*, r_2)$ mit $r_2 = \min\{\frac{1}{2}, \|x^1 - x^*\|\}$, dann $x^3 \in M \cap B^\circ(x^*, r_3)$ mit $r_3 = \min\{\frac{1}{3}, \|x^2 - x^*\|\}$ usw. Das ist eine Folge $\{x^n\} \subset M$, die gegen $x^* \notin M$ konvergiert, was zu zeigen war. $\square$

4.1.7 Übung. Untersuchen Sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
M_1 &:= \{x \in \mathbb{R} \mid \sin\tfrac{1}{x} = 1 \ \text{ oder } \ x = 0\} \\
M_2 &:= \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x = 1 \ \text{ oder } \ x = 0\} \\
M_3 &:= \{v \in \mathbb{R}^2 \mid v^\mathsf{T} v \le 1\} \\
M_4 &:= \{v \in \mathbb{R}^2 \mid v^\mathsf{T} v > 1\} \\
M_5 &:= \{v \in \mathbb{R}^2 \mid v^\mathsf{T} v = 1\}
\end{aligned}$$

im Hinblick auf die Eigenschaften, offen, beschränkt bzw. abgeschlossen zu sein. Siehe auch das folgende Lemma. $\diamond$

4.1.8 Lemma. *Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig und $\alpha \in \mathbb{R}$ eine gegebene Konstante. Dann ist die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < \alpha\}$ offen, während die Mengen $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \le \alpha\}$ und $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = \alpha\}$ abgeschlossen sind.* $\diamond$

Beweis.

(i) Gilt $f(x^*) < \alpha$, so existiert eine Umgebung U von x^*, dass $f(x) < \alpha$ für alle $x \in U$ gilt. In der Tat: Wäre das nicht der Fall, gäbe es eine Folge von Punkten x^n, die gegen x^* konvergiert, aber $f(x^n) \ge \alpha$ erfüllt. Da f stetig ist, folgt $f(x^*) = \lim_{n\to\infty} f(x^n) \ge \alpha$, das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.

(ii) Wenn f stetig ist, ist auch $-f$ stetig. Also ist die Menge

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \le \alpha\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid -f(x) \ge -\alpha\}$$

als Komplement der gemäss (i) offenen Menge $\{x \in \mathbb{R}^n \mid -f(x) < -\alpha\}$ abgeschlossen.

(iii) Es gilt nach (ii) und den Bemerkungen in Punkt 4.1.2, dass

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = \alpha\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \le \alpha\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid -f(x) \le -\alpha\}$$

als Durchschnitt abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist. □

4.1.9 Definition. Sei M eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Dann heisst M ***kompakt***, wenn aus jeder Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ eine konvergente Teilfolge $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ ausgewählt werden kann, deren Limes $x^*(\in X)$ ebenfalls zu M gehört. ◇

4.1.10 Satz. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist M genau dann kompakt, wenn M beschränkt und abgeschlossen ist.* ◇

Beweis.

Sei zunächst M kompakt gemäss Definition 4.1.9. Mit Satz 4.1.6 impliziert das zunächst die Abgeschlossenheit. Es bleibt zu zeigen, dass M beschränkt ist. Das beweisen wir indirekt. Wäre Menge M unbeschränkt, dann existierten zwei Folgen $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ in M, so dass $\|x_n - y_n\| \to \infty$ mit $n \to \infty$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit konvergieren aber wegen der Kompaktheit von M die Folgen $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ gegen Grenzelemente x^* bzw. y^* (andernfalls wähle konvergente Teilfolgen), was nach Dreiecksungleichung auf

$$\|x_n - y_n\| \le \|x_n - x^*\| + \|x^* - y^*\| + \|y^* - y_n\| \to \|x^* - y^*\| < +\infty$$

und somit auf einen Widerspruch führt. Also ist M beschränkt.

Sei nun M beschränkt und abgeschlossen im $\mathbb{R}^n$. Da M beschränkt ist, können wir wegen der Normäquivalenz im $\mathbb{R}^n$ annehmen, dass M in der Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$ beschränkt ist. Ist also $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ irgendeine Folge von n-Tupeln in M, so ist die (reelle) Folge der ersten Komponenten $\{x_1^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass hat $\{x_1^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine gegen ein x_1^* konvergente Teilfolge: die entsprechende abzählbar unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ heisse N_1. Da auch die (reelle) Folge der zweiten Komponenten $\{x_2^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, ist es auch die Teilfolge $\{x_2^k\}_{k\in N_1}$. Diese hat wieder eine gegen ein x_2^* konvergente Teilfolge usw. Also existiert nach endlich vielen Auswahlen von Teilfolgen eine Teilfolge von $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ (das sind n-Tupel), die gegen ein $x^* \in \mathbb{R}^n$ konvergiert. Da überdies M abgeschlossen ist, liegt x^* in M, die Menge M ist also kompakt, was zu zeigen war. □

4.1.11 Beispiel. Typische Beispiele für kompakte Teilmengen von $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^n$ sind die beschränkten abgeschlossenen Intervalle $[a, b]$ bzw. die verallgemeinerten beschränkten abgeschlossenen Intervalle $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$. ◇

4.1.12 Übung. Zeigen Sie, dass

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \le y \le |x|\}$$

kompakt ist. Zusatzfrage: Welche der Mengen in Übung 4.1.7 sind kompakt? ◇

4.1.13 Definition. Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heisst ***stetig im Punkt $z \in D$***, falls

$$\lim_{x \to z} f(x) = f(z),$$

d.h., falls zu jeder Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ gilt: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(z)$.
f heisst ***stetig*** (auf D), falls f in jedem Punkt $z \in D$ stetig ist. $\diamond$

4.1.14 Bemerkung. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Man kann zeigen: $f : D \to \mathbb{R}^m$ ist genau dann stetig in $z \in D$, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$\|x - z\| < \delta \;\Rightarrow\; \|f(x) - f(z)\| < \varepsilon.$$

Dabei hängt im allgemeinen δ von ε und z ab. Hinweis: $\|\cdot\|$ bedeutet rechts und links des Pfeils eigentlich etwas voneinander Verschiedenes, da es sich um Normen im $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$ handelt. Es ist aber in der Literatur üblich, die Bezeichnungen nicht zu unterscheiden, wenn es keine Verwechslungen geben kann. $\diamond$

4.1.15 Bemerkung. Im Spezialfall $m = 1$ ist das präzise der im Fach *Mathematik I* studierte Stetigkeitsbegriff. Ist f eine ***Vektorfunktion*** (also $m > 1$), bestehend aus den Komponenten $f_1, \ldots, f_m$ mit $f_j : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ für alle j von 1 bis m, dann bedeutet Stetigkeit von f, dass jede Komponente stetig sein muss (Normäquivalenzsatz!).

Die Betrachtung einer Vektorfunktion ist eigentlich nur eine kurze ("elegante") Schreibweise, um mehrere funktionelle Zusammenhänge auf einen Blick zu erfassen, z.B. könnte

$$\begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ \sqrt{xy} \end{pmatrix}$$

zwei Produktionsfunktionen zusammenfassen, die erste erfasst einen linearen Zusammenhang, die andere einen gemäss einer Cobb-Douglas-Funktion. Der Wirtschaftsstudent kennt das gut aus der Darstellung eines Vektors von Outputs, eines Vektors von verschiedenen Produktionsfaktoren usw. $\diamond$

4.1.16 Verknüpfungen. Sind $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig in $z \in \mathbb{R}^n$ sowie $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d$ stetig in $y = f(z)$, dann ist die Funktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ mit $h(x) := [g \circ f](x) := g(f(x))$ stetig in z, wie man sofort aus der Definition 4.1.13 schliesst.

Für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sind die Funktionen $f + g$, $f \cdot g$ und f/g wie üblich definiert (die Bilder sind ja in $\mathbb{R}$!). Sie sind stetig (in z oder auf $\mathbb{R}^n$), falls f und g stetig (in z oder auf $\mathbb{R}^n$) sind, wobei bei f/g die Voraussetzung $(g(x))^2 > 0$ (für x nahe z bzw. $x \in \mathbb{R}^n$) erfüllt sein muss. $\diamond$

4.1.17 Satz. *Sei $f : M \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig. Dann gilt: Ist M kompakt, so ist auch $f(M) \subset \mathbb{R}^m$ kompakt.* $\diamond$

Beweis. Sei $\{y_n\}$ irgendeine Folge in $f(M)$. Dann existiert eine zugehörige Folge $\{x_n\} \subset M$ mit $y_n = f(x_n)$ für alle n. Da M kompakt ist, hat $\{x_n\}$ eine konvergente Teilfolge $\{x_{n_k}\}$ mit Limes $x^* \in M$. Da f speziell stetig in x^* ist, folgt

$$f(x^*) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}),$$

also ist $\{y_{n_k}\}$ eine konvergente Teilfolge von $\{y_n\}$ mit Limes $y^* = f(x^*) \in f(M)$. Folglich ist $f(M)$ kompakt. □

4.1.18 Satz. (Satz von Weierstrass über die Existenz von Extrema)
Seien M eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $f : M \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es ein $x^* \in M$ und ein $x_* \in M$, so dass $f(x^*) = \max\{f(x) \,|\, x \in M\}$ und $f(x_*) = \min\{f(x) \,|\, x \in M\}$, d.h., die Funktion f nimmt auf M sowohl ihr Maximum als auch ihr Minimum an. ◇

Beweis. Nach dem vorhergehenden Satz ist $f(M) \subset \mathbb{R}$ kompakt, also eine beschränkte, abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$. Folglich existieren

$$\sup f(M) := \sup\{f(x) \,|\, x \in M\} \quad \text{und} \quad \inf f(M) := \inf\{f(x) \,|\, x \in M\}.$$

Nach Korollar 1.1.13 existieren dann Folgen $\{\alpha_n\} \subset f(M)$ und $\{\beta_n\} \subset f(M)$, so dass $\alpha_n \to \sup f(M)$ und $\beta_n \to \inf f(M)$. Da $f(M)$ abgeschlossen ist, folgt $\sup f(M) \in f(M)$ und $\inf f(M) \in f(M)$, was zu zeigen war. □

4.1.19 Normäquivalenz im Vektorraum der n-Tupel reeller Zahlen. Es seien $\|\cdot\|'$ und $\|\cdot\|$ zwei Normen auf $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es Konstanten $0 < \alpha \le \beta$, so dass

$$\alpha\|x\| \le \|x\|' \le \beta\|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.2}$$

Beweis. Man überlegt sich leicht, dass es genügt, den Fall $\|\cdot\|' = \|\cdot\|_2$ (euklidische Norm) zu betrachten. Da sich jedes $x \in \mathbb{R}^n$ mit Hilfe der kanonischen Basis $\{e^1, \dots, e^n\}$ von Einheitsvektoren als $x = \sum_{j=1}^n x_j\, e^j$ darstellen lässt, folgt nach den Rechenregeln für eine beliebige Norm und speziell für die euklidische Norm und das euklidische Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (mit Ungleichung von Cauchy-Schwarz):

$$\|x\| = \|\sum_{j=1}^n x_j\, e^j\| \le \sum_{j=1}^n (|x_j| \cdot \|e^j\|) = \big\langle\, (|x_1|, .., |x_n|), (\|e^1\|, .., \|e^n\|)\, \big\rangle \le \|x\|_2 \sqrt{\sum_{j=1}^n \|e^j\|^2}.$$

Damit ist die linke Ungleichung in (4.2) im Falle $\|\cdot\|' = \|\cdot\|_2$ gezeigt, man setze $\alpha^{-1} = \sqrt{\sum_{j=1}^n \|e^j\|^2}$. Zum Nachweis der rechten Ungleichung bemerken wir zunächst, dass die Funktion $\varphi(x) := \|x\|$ stetig auf dem normierten Raum $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ ist, denn mit der Dreiecksungleichung für $\|\cdot\|$ und der linken Ungleichung in (4.2) bei $\|\cdot\|' = \|\cdot\|_2$ gilt

$$|\; \|x\| - \|y\| \;| \le \|x - y\| \le \|x - y\|_2/\alpha \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Die Einheitssphäre $S = \{x \,|\, \|x\|_2 = 1\}$ ist bezüglich $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ beschränkt und nach Lemma 4.1.8 auch abgeschlossen, also kompakt. Nach dem Satz von Weierstrass nimmt φ auf S ihr Minimum in einem $z^* \in S$ an. Es gilt für jedes $x \ne 0$, dass $z := \|x\|_2^{-1} x$ in S liegt und somit $\|z\| \ge \|z^*\|$ mit $\|z^*\| > 0$ gilt. Daraus folgt $\|x\|_2 \le \beta\|x\|$ mit $\beta := \|z^*\|^{-1}$, was zu zeigen war. □

4.2 Partielle und totale Differenzierbarkeit

4.2.1 Vorbemerkung. Vorausgesetzt werden in dieser Vorlesung die grundlegenden Begriffe und Ergebnisse über die Differenzierbarkeit reellwertiger Funktionen in einer oder zwei reellen Veränderlichen, wie sie in der Lehrveranstaltung *Mathematik I* behandelt wurden, z.B.: Definitionen von Ableitung (bzw. partieller/totaler Differenzierbarkeit), Differential (bzw. totalem Differential) und Tangente (bzw. Tangentialebene), Interpretation als Linearisierung, Kettenregel und andere Rechenregeln, Ableitungen höherer Ordnung, Kriterien für Monotonie reeller Funktionen, Konvexität/Konkavität und relative Extrema sowie Mittelwertsatz und Satz von Taylor für reelle Funktionen (siehe auch Kapitel 2). $\diamond$

4.2.2 Generelle Voraussetzung. In diesem Kapitel betrachten wir den $\mathbb{R}^n$ stets als normierten Vektorraum mit einer gegebenen Norm $\|\cdot\|$. Wegen des Normäquivalenzsatzes darf $\|\cdot\|$ als beliebig angenommen werden; Begriffe wie offen, kompakt etc. beziehen sich dann auf diese Norm. Arbeiten wir einmal mit einer konkreten Norm wie $\|\cdot\|_2$ oder $\|\cdot\|_\infty$, geben wir das an. In der Regel bezeichnet 0 das Nullelement des betrachteten Raumes (in $\mathbb{R}$ wie in $\mathbb{R}^m$ oder $\mathbb{R}^n$).

4.2.3 Definition. (Repetition) Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ eine (nichtleere) offene Menge, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion und $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)^\mathsf{T} \in \mathcal{D}$. Die Funktion $x \mapsto f(x)$ heisst *im Punkt x^0* ***partiell differenzierbar*** *nach x_i*, falls der Limes

$$f_{x_i}(x^0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x^0 + te^i) - f(x^0)}{t}$$

existiert. Dabei ist e^i der i-te Einheitvektor im $\mathbb{R}^n$. Wie üblich beschränkt man sich bei der Limesbildung auf $t \neq 0$, so dass $x^0 + te^i \in \mathcal{D}$.

Dabei heisst $f_{x_i}(x^0)$ ***i-te partielle Ableitung*** *von f in x^0* bzw. *partielle Ableitung von f nach x_i in x^0*, und man schreibt synonym auch

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) \quad \text{oder} \quad D_i f(x^0).$$

Offenbar ist die partielle Ableitung von f nach x_i im Punkt x^0 identisch mit der Ableitung der reellen Funktion $\varphi_i(t) := f(x^0 + te^i)$, $t \in \mathbb{R}$, im Punkt $t = 0$.

Als ***Gradient*** von f im Punkt $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)^\mathsf{T}$ bezeichnen wir den Vektor (in der Regel spaltenweise geschrieben)

$$\nabla f(x^0) = (f_{x_1}(x^0), \ldots, f_{x_n}(x^0))^\mathsf{T},$$

statt $\nabla f(x^0)$ schreibt man auch $\operatorname{grad} f(x^0)$.

Ist f partiell differenzierbar nach x_i auf $\mathcal{D}$ (d.h., in allen Punkten $x \in \mathcal{D}$), so heisst die Funktion $x \in \mathcal{D} \mapsto f_{x_i}(x)$ *partielle Ableitung(sfunktion) von f nach x_i*. $\diamond$

4.2.4 Höhere partielle Ableitungen. Ist $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ auf $\mathcal{D}$ nach x_i partiell differenzierbar sowie die Funktion $x \mapsto f_{x_i}(x)$ nach x_j partiell differenzierbar in einem Punkt $x^0 \in \mathcal{D}$, so erhält man mittels $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right)$ die ***zweite partielle Ableitung*** *von f nach x_i und x_j in x^0* und schreibt dafür

$$f_{x_i x_j}(x^0) \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x^0).$$

Sinngemäss ist die Schreibweise auch für partielle Ableitungen noch höherer Ordnung, wenn sie existieren.

Wenn in x^0 zweite partielle Ableitungen von f nach x_i und x_j für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ existieren, fasst man sie in der *Hesse-Matrix*

$$\nabla^2 f(x^0) = \left(f_{x_i x_j}(x^0)\right)_{i,j=1,\dots,n}$$

zusammen. Statt $\nabla^2 f(x^0)$ finden sich in der Literatur auch Schreibweisen wie $\mathrm{Hess} f(x^0)$ oder $H_f(x^0)$ oder $D^2 f(x^0)$.

Unter gewissen Voraussetzungen lässt sich die Reihenfolge der partiellen Differentiation vertauschen, das sagt der folgende

Satz von Schwarz. Sei f auf einer offenen Umgebung U von $x^0 \in \mathbb{R}^n$ nach x_i und x_j partiell differenzierbar und existiere $f_{x_i x_j}(x)$ für alle $x \in U$. Ist die Funktion $f_{x_i x_j}(\cdot)$ stetig auf U, dann existiert auch $f_{x_j x_i}(x)$, und es gilt

$$f_{x_i x_j}(x) = f_{x_j x_i}(x) \quad \forall x \in U.$$

Wenn die Aussage für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ gilt, so sind folglich die Hesse-Matrizen $\nabla^2 f(x)$, $x \in U$, symmetrisch.

Beweis. Vgl. den Beweis von Satz 5.7 in *P. Kall, Analysis für Ökonomen* bzw. den Beweis von Satz 1 von §5 in *O. Forster, Analysis 2*. ◇

4.2.5 Definition. Seien $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion, $\mathcal{D}$ eine offene Menge und $x^0 \in \mathcal{D}$.

f heisst im Punkt x^0 ***differenzierbar*** (genauer auch *total differenzierbar* oder *vollständig differenzierbar* oder *Fréchet- differenzierbar*), falls

$$f(x^0 + u) = f(x^0) + \nabla f(x^0)^\mathsf{T} u + o(u) \tag{4.3}$$

für $x^0 + u \in \mathcal{D}$ gilt (das ist die bekannte *Linearisierungsformel* von Weierstrass), wobei

$$o(0) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{o(x)}{\|x\|} \to 0, \text{ falls } \|x\| \to 0. \tag{4.4}$$

Mit anderen Worten (wenn man die Definition von $o(\cdot)$ berücksichtigt): zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass

$$|f(x^0+u) - f(x^0) - \nabla f(x^0)^\mathsf{T} u| \leq \varepsilon \|u\| \text{ für alle } u \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|u\| < \delta. \tag{4.5}$$

◇

4.2.6 Wir erkennen in der Definition 4.2.5 den aus der Schule bekannten Spezialfall differenzierbarer *reeller* Funktionen $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wieder. Es gilt mit dem Differentialquotienten $f'(x^0)$

$$f(x^0+u) = f(x^0) + f'(x^0) \cdot u + o(u).$$

das ist der bekannte Spezialfall der Linearisierungsformel von Weierstrass. ◇

4.2.7 Definition. Sei nun $f = (f_1, \ldots, f_m)^\mathsf{T}$ eine Vektorfunktion, also $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und seien wieder $\mathcal{D}$ eine offene Menge und $x^0 \in \mathcal{D}$.

f heisst im Punkt x^0 ***differenzierbar***, falls die Komponentenfunktionen f_i, $i = 1, \ldots, m$, differenzierbar sind. Fassen wir die Gradienten zeilenweise zu einer Matrix $Df(x^0)$ zusammen, so hat diese die Form

$$Df(x^0) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x^0)^\mathsf{T} \\ \vdots \\ \nabla f_m(x^0)^\mathsf{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x^0)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x^0)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m(x^0)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(x^0)}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

und es gilt

$$f(x^0+u) = f(x^0) + Df(x^0)u + o(u), \tag{4.7}$$

für $x^0 + u \in \mathcal{D}$, wobei $o(u) = (o_1(u), \ldots, o_m(u))$ nun der Vektor der Fehlerfunktionen o_i (gemäss (4.4)) für die Funktionen f_i ist, es gilt also

$$o(0) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\|o(x)\|}{\|x\|} \to 0, \text{ falls } \|x\| \to 0.$$

Eine Funktion mit dieser Eigenschaft von $o(\cdot)$ nennt man ***o-Typ-Funktion***.

Die gemäss (4.6) definierte Matrix $Df(x^0)$ heisst ***Jacobi-Matrix*** (auch *Funktionalmatrix*) zu f in x^0. Andere in der Literatur übliche Schreibweisen sind z.B. $f'(x^0)$ und $J_f(x^0)$.

Die lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $L(u) := Df(x^0)u$ heisst ***(Fréchet)-Ableitung*** von f im Punkt x^0.[1] ◇

[1] Wegen der bekannten Zusammenhänge zwischen linearen Abbildungen und Matrizen können wir die Begriffe *Ableitung* und *Jacobi-Matrix* (bzw. *Gradient* für reellwertige Funktionen) synonym verwenden.

4.2.8 Ableitung der Linearkombination von differenzierbaren Funktionen. Sind $f, g : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $x^0 \in \mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ offen, so ist auch $\lambda f + \mu g$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ differenzierbar in x^0, und es gilt

$$D(\lambda f + \mu g)(x^0) = \lambda Df(x^0) + \mu Dg(x^0).$$

Das folgt elementar sofort aus den Definitionen. ◇

4.2.9 Totales Differential und Tangentialebene reellwertiger Funktionen. Für

$$f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \mathcal{D} \text{ offen }, \ x^0 \in \mathcal{D},$$

erhalten wir die aus der *Mathematik I* im Falle $n = 2$ bekannten Interpretationen. Die Ableitung $Df(x^0)$ ist natürlich der (als Zeilenvektor geschriebene) Gradient

$$\nabla f(x^0)^\mathsf{T} = (f_{x_1}(x^0), \ldots, f_{x_n}(x^0))$$

von f in x^0, die Werte der linearen Abbildung $L(u) = \nabla f(x^0)^\mathsf{T} u$ definieren mit $u = x - x^0$ die ***lineare Approximation*** $l(x) := f(x^0) + L(x - x^0)$ von f in x^0, also

$$l(x) = f(x^0) + \nabla f(x^0)^\mathsf{T}(x - x^0) = f(x^0) + \sum_{j=1}^{n} f_{x_j}(x^0)(x_j - x_j^0). \tag{4.8}$$

Im Falle $n = 2$ ist das also die Ihnen wohlbekannte Beziehung

$$l(x_1, x_2) = f(x_1^0, x_2^0) + f_{x_1}(x_1^0, x_2^0)(x_1 - x_1^0) + f_{x_2}(x_1^0, x_2^0)(x_2 - x_2^0).$$

Setzt man in der Linearisierungsformel (4.3) von Weierstrass $u = dx = (dx_1, \ldots, dx_n)^\mathsf{T}$ sowie $df := df|_{x=x^0} = f(x^0 + dx) - f(x^0) - o(dx)$, so folgt

$$df = \nabla f(x^0)^\mathsf{T} dx = f_{x_1}(x^0)dx_1 + \ldots + f_{x_n}(x^0)dx_n,$$

d.h., die Formel für das ***totale Differential*** von f in x^0. Im Falle $n = 2$ ist das also die Ihnen wohlbekannte Beziehung

$$df = f_{x_1}(x_1^0, x_2^0)dx_1 + f_{x_2}(x_1^0, x_2^0)dx_2.$$

Schreibt man $u = x - x^0$ und führt die Variable $x_{n+1} = l(x)$ ein, so ergibt die Formel der linearen Approximation (4.8)

$$x_{n+1} = f(x^0) + \sum_{j=1}^{n} f_{x_j}(x^0)(x_j - x_j^0),$$

d.h., die Gleichung der ***Tangentialhyperebene*** an den Graphen $\{(x, f(x)) | x \in \mathcal{D}\}$ von f im Punkt $(x^0, f(x^0))$. Für $n = 2$ gilt also die Ihnen wohlbekannte Gleichung

$$x_3 = f(x_1^0, x_2^0) + f_{x_1}(x_1^0, x_2^0)(x_1 - x_1^0) + f_{x_2}(x_1^0, x_2^0)(x_2 - x_2^0),$$

und man spricht dann im Einklang mit der Terminologie aus der linearen Algebra von der *Tangentialebene.* ◇

4.2.10 Bemerkung. Bereits aus der *Mathematik I* ist bekannt, dass eine in einem gegebenen Punkt nach allen Variablen partiell differenzierbare Funktion dort nicht einmal stetig, geschweige denn (total) differenzierbar sein muss. Wir erinnern an das Beispiel:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{falls } x^2+y^2>0, \\ 0, & \text{falls } x=y=0, \end{cases}$$

betrachtet in $(0,0)$. Es gilt aber der folgende Satz. ◇

4.2.11 Satz. *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ offen und habe $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ auf $\mathcal{D}$ partielle Ableitungen f_{x_j} nach allen Variablen x_j. Sind für alle j die partiellen Ableitungen f_{x_j} in einem Punkt $x^0 \in \mathcal{D}$ stetig, dann ist f in x^0 differenzierbar.*

Das impliziert: Ist $f = (f_1, \ldots, f_m)^\mathsf{T}$ eine Funktion von $\mathcal{D}$ in $\mathbb{R}^m$, deren Komponenten f_i den eben gestellten Voraussetzungen genügen, so ist f differenzierbar.

Beweis. Vgl. Vorlesung oder Beweis von Satz 2 in §6 in *O. Forster, Analysis 2*. □

4.2.12 Definition. Eine Funktion $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die nach allen Variablen im Punkt x^0 stetige partielle Ableitungen hat, heisst (auf $\mathcal{D}$) ***stetig differenzierbar*** in x^0 oder *stetig partiell differenzierbar in x^0 nach allen Variablen.*

Eine Funktion $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die nach allen Variablen auf $\mathcal{D}$ stetige partielle Ableitungen hat, heisst ***stetig differenzierbar*** oder *stetig partiell differenzierbar nach allen Variablen.*

Existieren in $x^0 \in \mathcal{D}$ alle zweiten partiellen Ableitungen von f und sind dort stetig, so heisst f ***zweimal stetig differenzierbar*** in x^0 oder *zweimal stetig partiell differenzierbar in x^0 nach allen Variablen.* Ist diese Eigenschaft für alle $x^0 \in \mathcal{D}$ erfüllt, spricht man einfach von f als einer *zweimal stetig differenzierbaren* Funktion.

Sind für eine Vektorfunktion $f = (f_1, \ldots, f_m)^\mathsf{T}$ die betreffenden Eigenschaften für alle Komponenten f_i erfüllt, werden die hier definierten Begriffe analog verwendet. ◇

4.2.13 Repetition: Kettenregel für reelle Funktionen.
Seien $X \subset \mathbb{R}$ und $Y \subset \mathbb{R}$ offene Mengen sowie $g : X \to \mathbb{R}$ und $f : Y \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $g(X) \subset Y$. Sind g in $x_0 \in X$ differenzierbar und f in $y_0 = g(x_0)$ differenzierbar, dann ist auch

$$h(x) := f(g(x)),\ x \in X,$$

in x_0 differenzierbar, und es gilt – *äussere Ableitung mal innere Ableitung* –

$$h'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0),$$

d.h., in der Schreibweise nach Leibniz

$$\frac{dh(x_0)}{dx} = \frac{df(g(x_0))}{dy}\frac{dg(x_0)}{dx} \qquad \left(\text{"Faustregel" mit } z = z(y(x))\text{: } \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}\right).$$

Analog gilt die folgende (verallgemeinerte) Kettenregel. ◇

4.2.14 Satz. (- verallgemeinerte - Kettenregel) *Seien $X \subset \mathbb{R}^n$ und $Y \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen sowie $g : X \to \mathbb{R}^m$ und $f : Y \to \mathbb{R}^q$ Funktionen mit $g(X) \subset Y$. Sind g in $x^0 \in X$ differenzierbar und f in $y^0 = g(x^0)$ differenzierbar, dann ist auch*

$$h := f \circ g : X \to \mathbb{R}^q : \quad h(x) := f(g(x)),\ x \in X,$$

in x^0 differenzierbar, und es gilt – äussere Ableitung mal innere Ableitung –

$$Dh(x^0) = Df(g(x^0))\, Dg(x^0), \tag{4.9}$$

wobei $Df(g(x^0))$ die Jacobi-Matrix von f im Punkt $y^0 = g(x^0)$ sowie $Dh(x^0)$ und $Dg(x^0)$ die Jacobi-Matrizen von h bzw. g im Punkt x^0 sind. ◇

Bemerkung.

Bevor wir den Satz beweisen, geben wir erst einmal Spezialfälle der Formel (4.9) an. Die Voraussetzungen des Satzes seien jeweils erfüllt.

1. Sei $q = 1$, d.h., sei f reellwertig. Wir sind also in der Situation

$$h(x) = f(g_1(x), \ldots, g_m(x)) \in \mathbb{R},\ x \in X \subset \mathbb{R}^n.$$

Dann lautet die Kettenregel (4.9) in Matrix-Schreibweise wie folgt:

$$\nabla h(x^0)^\mathsf{T} = \nabla f(g_1(x^0), \ldots, g_m(x^0))^\mathsf{T} Dg(x^0),$$

man beachte dabei, dass die Jacobi-Matrix der reellwertigen Funktion

$$(y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m \mapsto f(y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}$$

gleich dem Gradienten von f in *Zeilenschreibweise*, also gleich $(\nabla f)^\mathsf{T}$ ist, analog für h! Ausgeschrieben ergibt sich mit $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)^\mathsf{T}$ (in der Leibniz-Schreibweise partieller Ableitungen, die hier einprägsamer ist):

$$\left(\frac{\partial h(x^0)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial h(x^0)}{\partial x_n}\right)$$
$$= \left(\frac{\partial f(g_1(x^0),\ldots,g_m(x^0))}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial f(g_1(x^0),\ldots,g_m(x^0))}{\partial y_m}\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(x^0)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1(x^0)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m(x^0)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m(x^0)}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

die **Kettenregel für f(g(x)) reell, y = g(x) Vektor, x Vektor.**

In Summenschreibweise (Leibniz-Form) bedeutet das für $j \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\frac{\partial h(x^0)}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(g_1(x^0), \ldots, g_m(x^0))}{\partial y_i} \frac{\partial g_i(x^0)}{\partial x_j}, \tag{4.10}$$

in Kurzschreibweise $h_{x_j}(x^0) = \sum_{i=1}^m f_{y_i}(g_1(x^0), \ldots, g_m(x^0))\ (g_i)_{x_j}(x^0)$.

2. Im Spezialfall (nach Variablenumbenennung)

$$h(t) = f(x(t), y(t)) \ \text{ mit } x, y : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

ist Ihnen die Kettenregel (4.10) in $t_0 \in X$ wohlbekannt:

$$h'(t_0) \ = \ f_x(x(t_0), y(t_0))\, x'(t_0) \ + \ f_y(x(t_0), y(t_0))\, y'(t_0), \tag{4.11}$$

diesmal wieder in der Kurzschreibweise für partielle Ableitungen geschrieben.

3. Verallgemeinern wir (4.11) auf die reellwertige zusammengesetzte Funktion

$$h(t) = f(g_1(t), \ldots, g_m(t)), \ \ g_i : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ \forall i, \ \ f : Y \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \tag{4.12}$$

ergibt sich aus (4.10) sofort – es ist nur x in t umbenannt worden – die

Kettenregel für f(g(t)) reell, y = g(t) Vektor, t reell:

$$h'(t_0) \ = \ \sum_{i=1}^{m} f_{y_i}(g_1(t_0), \ldots, g_m(t_0))\, g_i'(t_0), \tag{4.13}$$

d.h., in Leibniz-Schreibweise:

$$\frac{dh(t_0)}{dt} \ = \ \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(g_1(t_0), \ldots, g_m(t_0))}{\partial y_i}\, \frac{dg_i(t_0)}{dt}.$$

4. Setzt man in (4.12) die Vektorfunktion $g(t)$ noch spezieller an, und zwar durch

$$g(t) := y^0 + tv, \ t \in \mathbb{R} \qquad (y^0, v \in \mathbb{R}^m \text{ gegeben}),$$

(also komponentenweise $g_i(t) := y_i^0 + tv_i \ \forall i$), so ist

$$h(t) := f(y^0 + tv).$$

Dann definiert $h'(0)$ in diesem Spezialfall die ***Richtungsableitung*** *der reellwertigen Funktion $f = f(y_1, \ldots, y_m)$ im Punkt y^0 in Richtung v:*

$$\begin{aligned} h'(0) \ &:= \ \lim_{t \to 0} \frac{f(y^0 + tv) - f(y^0)}{t} \\ &= \ \nabla f(y^0)^{\mathsf{T}} v \\ &= \ \sum_{i=1}^{m} f_{y_i}(y_1^0, \ldots, y_m^0)\, v_i. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Das ist leicht einzusehen: man beachte in (4.13), dass hier $g_i(0) = y_i^0$ und $g_i'(0) = v_i$ für alle i.

5. Sei nun $f = f(t)$ eine Vektorfunktion einer reellen Variablen t und $t = g(x)$ reellwertig in n Variablen, d.h.,

$$h_k(x_1, \dots, x_n) = f_k(g(x_1, \dots, x_n)),\ k = 1, \dots, q.$$

Dann spezialisiert sich Formel (4.9) (man beachte wieder $Dg = (\nabla g)^\mathsf{T}$) zu

$$Dh(x^0) \ = \ Df(g(x^0))\, \nabla g(x^0)^\mathsf{T},$$

d.h., mit $x^0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)$,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1(x^0)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1(x^0)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_q(x^0)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_q(x^0)}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{df_1(g(x^0))}{dt} \\ \vdots \\ \frac{df_q(g(x^0))}{dt} \end{pmatrix} \left(\frac{\partial g(x^0)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g(x^0)}{\partial x_n} \right),$$

d.h., in Leibniz- bzw. Kurz-Schreibweise für $i = 1, \dots, q,\ j = 1, \dots, n$,

$$\frac{\partial h_i(x^0)}{\partial x_j} = \frac{df_i(g(x^0))}{dt} \frac{\partial g(x^0)}{\partial x_j} \quad \text{bzw.} \quad [h_i]_{x_j}(x^0) \ = \ f_i'(g(x^0))\ g_{x_j}(x^0).$$

Am einfachsten merkt man sich also die Kettenregel in Matrixschreibweise (4.9) und beachtet, dass dabei die Gradienten jeder Komponentenfunktion jeweils als Zeile geschrieben sind. ◇

Beweis von Satz 4.2.14.

Sei

$$A := Dg(x^0) \quad \text{und} \quad B := Df(y^0),\ y^0 = g(x^0).$$

Zu zeigen ist, dass BA der Definition 4.2.7 bezüglich $h(x) = f(g(x))$ in x^0 genügt.

Nach Voraussetzung gilt mit o-Typ-Funktionen o_g und o_f

$$g(x^0 + u) = g(x^0) + Au + o_g(u) \ \text{ und } \ f(y^0 + v) = f(y^0) + Bv + o_f(v).$$

Sei v speziell

$$v := g(x^0 + u) - g(x^0) = Au + o_g(u).$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} f(g(x^0 + u)) &= f(g(x^0) + v) \\ &= f(g(x^0)) + Bv + o_f(v) \\ &= f(g(x^0)) + BAu + Bo_g(u) + o_f(Au + o_g(u)). \end{aligned}$$

Dass $Bo_g(u) + o_f(Au + o_g(u))$ eine o-Typ-Funktion $o(u)$ ist, überlegt man sich leicht. Damit hat BA die gesuchte Eigenschaft. □

4.2.15 Korollar. Sind in Satz 4.2.14 die Funktionen f und g sogar stetig differenzierbar, so ist es auch die zusammengesetzte Funktion $h = f \circ g$. $\diamond$

Beweis. Die Aussage folgt daraus, dass alle auftretenden partiellen Ableitungen von f und g stetig sind und nach Satz 4.2.14 die partiellen Ableitungen der Verknüpfung existieren und sich aus partiellen Ableitungen von f und g zusammensetzen. Dabei überträgt sich ihre Stetigkeit auf die Zusammensetzung. $\square$

4.2.16 Übung. In einer Unternehmung setzen sich die durchschnittlichen Produktionskosten k_1 und Lagerkosten k_2 als Funktionen der Faktormengen t, s und des Outputs y folgendermassen zusammen

$$\begin{pmatrix} k_1(s,t,y) \\ k_2(s,t,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^{-1}(\alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 t)\varphi(s,t,y) \\ \beta_0 + \beta_1 y^{-1} + \beta_2 y + \varphi(s,t,y) \end{pmatrix},$$

wobei α_i und β_j gegebene Konstanten sein sollen. Die Funktion φ sei stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^2 \times (0, +\infty)$.

1. Man bestimme für jede Kostenart die jeweiligen (partiellen) Grenzkosten der Faktoren s, t und des Outputs y. (Hinweis: Das geht elementar ...)

2. Berechnen Sie dieselben Grössen auf dem Weg über die allgemeine Formel (4.9), indem Sie dort $h := k$ sowie
   $g_1(s,t,y) = y^{-1}(\alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 t)$,
   $g_2(s,t,y) = \varphi(s,t,y)$,
   $g_3(s,t,y) = \beta_0 + \beta_1 y^{-1} + \beta_2 y$,
   $f_1(\xi,\eta,\nu) = \xi\eta \quad \text{und} \quad f_2(\xi,\eta,\nu) = \eta + \nu$
   setzen. $\diamond$

4.2.17 Übung. Man berechne den Gradienten der zusammengesetzten Funktion

$$h(x_1,x_2,x_3) = f(\sin x_1 + \cos x_2 + \ln x_3\,,\ x_1^{-1} x_2 x_3^2), \quad x_1, x_2, x_3 > 0,$$

auf dem Weg über die allgemeine Formel (4.9), wobei vorausgesetzt sei, dass $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist. $\diamond$

4.2.18 Homogene Funktionen. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heisst bekanntlich *homogen vom Grade* s, $s \in \mathbb{N}$, wenn für beliebige $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $f(\lambda x) = \lambda^s f(x)$. Man kann auch die Einschränkung auf $\lambda \geq 0$ und $x \geq 0$ (komponentenweise) betrachten.

Beispielsweise ist eine Produktionsfunktion $y = f(x_1, x_2)$, die von Faktormengen x_1, x_2 abhängt, homogen vom Grade 1 (man sagt dann, sie sei *linear homogen*), wenn eine Verdopplung (d.h. $\lambda = 2$) der Faktormengen x_1, x_2 auf die Verdopplung des Outputs y

führt. Ist sie homogen vom Grade 2, bewirkt eine Verdopplung der Faktormengen x_1, x_2 die Vervierfachung des Outputs y.

Satz von Euler. Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Falls f homogen vom Grade s ist, so gilt $\nabla f(x)^\mathsf{T} x = sf(x)$.

Beweis. Sei x fest. Nach Satz 4.2.14 hat $h(\lambda) := f(\lambda x)$ die Ableitung

$$h'(\lambda) = \nabla f(\lambda x)^\mathsf{T} x.$$

Da f homogen vom Grade s ist, gilt

$$h(\lambda) = f(\lambda x) = \lambda^s f(x),$$

folglich

$$h'(\lambda) = s\lambda^{s-1} f(x).$$

Nach Gleichsetzung folgt

$$\nabla f(\lambda x)^\mathsf{T} x = s\lambda^{s-1} f(x),$$

also liefert $\lambda = 1$ speziell die Behauptung. □

4.2.19 Umkehrung des Satzes von Euler. Eine interessante Anwendung der Ableitungsregeln ist auch die Umkehrung des Satzes von Euler:

> Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und gilt mit einem $s \in \mathbb{N}$
> $\nabla f(x)^\mathsf{T} x = sf(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, so ist f homogen vom Grade s.

Beweis. Wir beweisen $f(\lambda x) = \lambda^s f(x)$ für $\lambda \neq 0$, wegen der Stetigkeit von f stimmt die Gleichheit auch für $\lambda = 0$. Es seien also für $\lambda \neq 0$

$$h(\lambda) := f(\lambda x) \quad \text{und} \quad \varphi(\lambda) := \frac{f(\lambda x)}{\lambda^s}.$$

Nach der Produktregel für differenzierbare reelle Funktionen gilt wegen $\varphi(\lambda) = h(\lambda)\lambda^{-s}$ und $h'(\lambda) = \nabla f(\lambda x)^\mathsf{T} x$ sowie nach unserer Voraussetzung $sf(\lambda x) = \nabla f(\lambda x)^\mathsf{T}(\lambda x)$:

$$\varphi'(\lambda) = \frac{h'(\lambda)}{\lambda^s} - \frac{sh(\lambda)}{\lambda^{s+1}} = \frac{\nabla f(\lambda x)^\mathsf{T} x - s\lambda^{-1} f(\lambda x)}{\lambda^s} = \frac{\nabla f(\lambda x)^\mathsf{T} x - \nabla f(\lambda x)^\mathsf{T} x}{\lambda^s} = 0,$$

d.h., φ ist identisch einer Konstante, nennen wir sie c, also

$$\varphi(\lambda) = \frac{f(\lambda x)}{\lambda^s} = c, \quad \text{d.h.,}\ f(\lambda x) = \lambda^s c.$$

Andererseits gilt speziell $c = \varphi(1) = f(x)$, folglich $f(\lambda x) = \lambda^s c = \lambda^s f(x)$, was zu beweisen war. ◇

4.2.20 Bemerkung zu Schreibweisen. In Anwendungen verbindet man häufig mit gewissen Variablenbezeichnungen eine spezielle Interpretation, und so kommt es dann zu Schreibweisen wie

$$f = f(x(t), y(t)),$$

dann lauten die Formel für die Ableitung

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

und für das totale Differential

$$df = f_x\, x'\, dt + f_y\, y'\, dt.$$

Damit taucht das Funktionssymbol f in Doppelbedeutung als Funktion von (x, y) bzw. als Funktion von t auf.

Wir haben oben bevorzugt und werden es weiter so halten, einen neuen Namen, z.B. $\varphi(t) := f(x(t), y(t))$, zu benutzen, um schon durch die Bezeichnung klar zu machen, dass eine neue Funktion von t gebildet wird. ◇

4.3 Mittelwertsatz, Taylor-Formel und Optimalitätsbedingungen

In diesem Abschnitt betrachten wir reellwertige, stetig differenzierbare Funktionen in n Veränderlichen. Wir beweisen dafür den Mittelwertsatz und die Taylor-Formel bis zur 2. Ordnung und geben eine Anwendung auf relative Extrema und konvexe Funktionen an. Besonderer Wert wird darauf gelegt, die Zusammenhänge zu den aus der *Mathematik I* bekannten Konzepten und Aussagen darzustellen.

4.3.1 Repetition: Mittelwertsatz der Differentialrechnung reeller Funktionen. Sei $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion über einem Intervall I. Dann gibt es zu beliebigen Punkten $x, x + u \in I$ ein $\theta \in (0, 1)$, so dass

$$f(x + u) = f(x) + u \cdot f'(x + \theta u).$$

Diese Aussage ist insbesondere ein Spezialfall der Taylor-Formel (Satz 2.2.1). ◇

Wir verallgemeinern nun diesen Mittelwertsatz auf reellwertige Funktionen in n Veränderlichen. Er spielt für viele theoretische Aussagen über Eigenschaften differenzierbarer Funktionen eine wichtige Rolle.

4.3.2 Satz. (Mittelwertsatz der Differentialrechnung). *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Seien $x \in \mathcal{D}$ und $u \in \mathbb{R}^n$ derart, dass $x + tu \in \mathcal{D}$ für alle $t \in [0, 1]$ erfüllt ist. Dann existiert ein $\theta \in (0, 1)$, so dass*

$$f(x + u) = f(x) + u^\mathsf{T} \nabla f(x + \theta u), \tag{4.15}$$

also

$$f(x_1 + u_1, \dots, x_n + u_n) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^{n} u_j \cdot f_{x_j}(x_1 + \theta u_1, \dots, x_n + \theta u_n)$$

in ausführlicher Schreibweise. ◇

Beweis. Wir definieren

$$h(t) := f(x + tu), \ t \in [0, 1].$$

Folglich ist h stetig differenzierbar, und es gilt $h(0) = f(x)$ und $h(1) = f(x + u)$. Der Mittelwertsatz für Funktionen in 1 Variablen liefert

$$\exists \theta \in (0, 1) : \quad h(1) = h(0) + 1 \cdot h'(\theta).$$

Die Kettenregel (4.13) impliziert mit $g(t) := x + tu$ aber

$$h'(t) = \nabla f(x + tu)^\mathsf{T} u, \tag{4.16}$$

was auf die Behauptung führt. □

4.3.3 Korollar. (Mittelwertsatz der Differentialrechnung in Integralform). *Unter den Voraussetzungen von Satz 4.3.2 gilt*

$$f(x + u) = f(x) + \sum_{j=1}^{n} u_j \alpha_j \quad \text{mit } \alpha_j := \int_0^1 f_{x_j}(x + tu) dt. \tag{4.17}$$

◇

Beweis. Sei wieder $h(t) = f(x + tu)$, $t \in [0, 1]$. Da die Ableitung h' stetig ist, kann auf h' und h der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung angewendet werden, und es folgt

$$h(1) - h(0) = \int_0^1 h'(t) dt,$$

was wie im vorhergenden Beweis auf die Behauptung führt. □

4.3.4 Bemerkung zu Vektorfunktionen. Ist $f = (f_1, \dots, f_m)^\mathsf{T}$ eine stetig differenzierbare *Vektorfunktion*, gibt es keine Aussage analog zu (4.15) (etwa mit $Df(x + \theta u)$ anstelle des Gradienten). Natürlich gilt (4.15) für jede einzelne Komponente f_i mit einem gewissen

$\theta = \theta_i \in (0,1)$, aber zu $i \neq k$ kann für die Zwischenstellen $x + \theta_i u \neq x + \theta_k u$ gelten, es gibt also im allgemeinen keine gemeinsame Zwischenstelle.

Der Mittelwertsatz in Integralform wird dagegen für Vektorfunktionen viel benutzt: Für jede Komponente f_i lässt sich die Differenz $f_i(x+u) - f_i(x)$ mit Hilfe eines Integrals darstellen. $\diamond$

4.3.5 Satz. (Taylor-Formel mit Restglied 2. Ordnung). *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Seien $x \in \mathcal{D}$ und $u \in \mathbb{R}^n$ derart, dass $x + tu \in \mathcal{D}$ für alle $t \in [0,1]$ erfüllt ist. Dann existiert ein $\theta \in (0,1)$, so dass*

$$f(x+u) = f(x) + u^\mathsf{T} \nabla f(x) + \tfrac{1}{2} u^\mathsf{T} \nabla^2 f(x + \theta u) u, \tag{4.18}$$

also in Summenschreibweise

$$f(x+u) = f(x) + \sum_{j=1}^n u_j f_{x_j}(x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i u_j \; f_{x_i x_j}(x + \theta u). \tag{4.19}$$

$\diamond$

Beweis. Wir setzen wieder

$$h(t) := f(x + tu), \; t \in [0,1].$$

Nach den Voraussetzungen und Korollar 4.2.15 ist h zweimal stetig differenzierbar. Nach dem Satz von Taylor im Reellen, vgl. Satz 2.2.1, existiert also ein $\theta \in (0,1)$, so dass

$$h(1) = h(0) + 1 \cdot h'(0) + \tfrac{1}{2} \cdot h''(\theta).$$

Offenbar gilt $h(1) = f(x+u)$, $h(0) = f(x)$, und wir rechnen nach Kettenregel aus - vgl. (4.13) bzw. (4.16) -

$$\begin{aligned} h'(t) &= \sum_{j=1}^n u_j f_{x_j}(x + tu) &&= u^\mathsf{T} \nabla f(x + tu), \\ h''(t) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i u_j \; f_{x_i x_j}(x + tu) &&= u^\mathsf{T} \nabla^2 f(x + tu) u, \end{aligned}$$

was das gewünschte Resultat liefert. $\square$

4.3.6 Übung. Man bestimme die Taylor-Entwicklung der Funktion

$$f(x,y,z) = \frac{x-y}{x+y} + z^3, \; x > 0, \; y > 0, \; z \in \mathbb{R},$$

im Punkt $(1,1,1)$ bis einschliesslich den Gliedern 2. Ordnung (an einer Zwischenstelle). $\diamond$

4.3.7 Notwendige Bedingungen 1. Ordnung für lokale Extrema. Es seien $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Hat f an der Stelle $x^0 \in \mathcal{D}$ ein lokales Extremum, d.h., existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass [2]

$$(i)\ f(x) \le f(x^0) \ \text{ oder } \ (ii)\ f(x) \ge f(x^0) \qquad \text{für alle } \ x \in B^\circ(x^0, \varepsilon),$$

dann gilt

$$\nabla f(x^0) = 0. \tag{4.20}$$

Beweis. Seien x^0 Stelle eines lokalen Maximum von f und $h(t) := f(x^0 + te^j)$, $t \in \mathbb{R}$, mit dem j-ten Einheitsvektor e^j in $\mathbb{R}^n$. Somit gilt $h(t) - h(0) = f(x^0 + te^j) - f(x^0) \le 0$ für positive wie negative (!!) t nahe 0. Dann folgt nach Division durch t und Grenzübergang $h'(0) = 0$. Es ist aber $h'(0) = f_{x_j}(x^0)$. Da j beliebig war, folgt (4.20). Analog geht der Beweis für lokale Minima. ◇

4.3.8 Definition. Sei f eine auf einer offenen Menge $\mathcal{D}$ definierte reellwertige Funktion. Man sagt, f hat an der Stelle $x^0 \in \mathcal{D}$ ein ***strenges lokales Minimum*** (in der Literatur auch *isoliertes lokales Minimum* genannt), falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass

$$f(x^0) < f(x) \quad \forall x \in B^\circ(x^0, \varepsilon),\ x \ne x^0.$$

Man sagt, f hat an der Stelle $x^0 \in \mathcal{D}$ ein ***strenges lokales Maximum*** (in der Literatur auch *isoliertes lokales Maximum* genannt), falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass

$$f(x^0) > f(x) \quad \forall x \in B^\circ(x^0, \varepsilon),\ x \ne x^0.$$

◇

4.3.9 (Semi-)Definitheit symmetrischer Matrizen. Wir diskutieren hier ohne Beweis die Definition und Charakterisierungen der positiven bzw. negativen (Semi-)Definitheit bzw. Indefinitheit symmetrischer Matrizen. Dieses Kapitel wird in der *Mathematik III - Lineare Algebra für Ökonomen* ausführlich behandelt.

Eine n-reihige symmetrische Matrix A heisst

positiv definit, wenn $\underline{v}^\mathsf{T} A \underline{v} > 0$ für alle $\underline{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{o}\}$ gilt;

positiv semidefinit, wenn $\underline{v}^\mathsf{T} A \underline{v} \ge 0$ für alle $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ gilt;

negativ definit, wenn $\underline{v}^\mathsf{T} A \underline{v} < 0$ für alle $\underline{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{o}\}$ gilt;

negativ semidefinit, wenn $\underline{v}^\mathsf{T} A \underline{v} \le 0$ für alle $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ gilt;

indefinit, wenn keine dieser vier Eigenschaften gilt.

[2]Bekanntlich spricht man im Falle (i) von einem *lokalen Maximum* (bzw. – da $\mathcal{D}$ offen ist – auch von einem *relativen Maximum*), in Falle (ii) von einem *lokalen Minimum* (bzw. *relativen Maximum*) von f an der Stelle x^0.

Hauptabschnittsdeterminanten. Entsteht $A^{[k]}$ aus einer n-reihigen symmetrischen Matrix $A = (a_{ij})$ durch Streichen sowohl der letzten k Zeilen als auch der letzten k Spalten von A, dann heisst

$$\det A^{[k]} \quad \text{eine } \textit{Hauptabschnittsdeterminante} \text{ von } A.$$

Alle Teilmatrizen $A^{[k]}$ sind wieder symmetrisch. Insbesondere gilt also $\det A = \det A^{[0]}$ und $a_{11} = \det A^{[n-1]}$. Zum Beispiel sind für eine (3×3)-Matrix $A = (a_{ij})$ die Zahlen

$$a_{11}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

die Hauptabschnittsdeterminanten von A.

Definitheitskriterien Sei A eine n-reihige symmetrische Matrix. Dann ist

A positiv definit genau dann, wenn
alle Hauptabschnittsdeterminanten von A positiv sind;

A negativ definit genau dann, wenn
die Hauptabschnittsdeterminanten $\det A^{[k]}$ von A positiv im Falle gerader Ordnung von $A^{[k]}$, aber negativ im Falle ungerader Ordnung von $A^{[k]}$ sind.

◇

4.3.10 Übung. Überprüfen Sie die Matrizen

$$\begin{pmatrix} \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ -\cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

auf positive/negative Definitheit. ◇

4.3.11 Satz. (Hinreichende Optimalitätsbedingungen 2. Ordnung). *Es seien $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und $x^0 \in \mathcal{D}$ ein Punkt mit*

$$\nabla f(x^0) = 0.$$

Dann gelten die folgenden hinreichenden Kriterien:

(i) Ist die Hesse-Matrix $\nabla^2 f(x^0)$ positiv definit, so hat f an der Stelle x^0 ein strenges lokales Minimum.

(ii) Ist die Hesse-Matrix $\nabla^2 f(x^0)$ negativ definit, so hat f an der Stelle x^0 ein strenges lokales Maximum.

(iii) Ist die Hesse-Matrix $\nabla^2 f(x^0)$ indefinit, so besitzt f an der Stelle x^0 <u>kein</u> lokales Extremum. ◇

Beweis. Die Hesse-Matrizen $\nabla^2 f(x)$ von f sind nach Voraussetzung symmetrisch, denn sie genügen den Voraussetzungen des Satzes von Schwarz.

Wegen der Stetigkeit der Funktion $x \mapsto \nabla^2 f(x)$ kann man ohne Mühe folgendes beweisen (wir verzichten auf die Details): Ist $\nabla^2 f(x^0)$ positiv definit (bzw. negativ definit), so existiert ein ein $\delta > 0$, so dass auch $\nabla^2 f(x)$ positiv definit (bzw. negativ definit) für alle $x \in B^\circ(x^0, \delta)$ gilt. Dabei sei δ so klein gewählt, dass $B^\circ(x^0, \delta) \subset \mathcal{D}$.

Beweis von (i). Sei $\delta > 0$ derart, dass $\nabla^2 f(x)$ positiv definit für alle $x \in B^\circ(x^0, \delta) \subset \mathcal{D}$ ist. Sei $x \in B^\circ(x^0, \delta)$ mit $x \neq x^0$ beliebig. Dann gilt nach der Taylor-Formel in Satz 4.3.5 mit $u := x - x^0$, dass

$$f(x) = f(x^0 + u) = f(x^0) + u^\mathsf{T} \nabla f(x^0) + \tfrac{1}{2} u^\mathsf{T} \nabla^2 f(x^0 + \theta u) u \tag{4.21}$$

für ein gewisses $\theta \in (0, 1)$. Da $x^0 + u \in B^\circ(x^0, \delta)$, gilt auch $x^0 + \theta u \in B^\circ(x^0, \delta)$, d.h., nach Definition der positiven Definitheit und wegen $u \neq 0$ ist speziell

$$\tfrac{1}{2} u^\mathsf{T} \nabla^2 f(x^0 + \theta u) u > 0.$$

Nach Voraussetzung ist $\nabla f(x^0) = 0$, also folgt aus (4.21) unmittelbar $f(x) > f(x^0)$. Da $x \neq 0$ beliebig aus $B^\circ(x^0, \delta)$ gewählt war, ergibt sich

$$f(x) > f(x^0) \quad \forall x \in B^\circ(x^0, \delta), x \neq 0.$$

was zu zeigen war.

Beweis von (ii). Man wende die Argumente zum Beweis von (i) auf die Funktion $-f$ an.

Beweis von (iii). Da $\nabla f(x^0)$ indefinit ist, gibt es ein $u \neq 0$ und ein $v \neq 0$, so dass

$$u^\mathsf{T} \nabla f(x^0) u > 0 \quad \text{und} \quad v^\mathsf{T} \nabla f(x^0) v < 0. \tag{4.22}$$

Dann liefert aber die Taylor-Entwicklung 2. Ordnung und $\nabla f(x^0) = 0$, dass für beliebige $s, t \in \mathbb{R}$ mit $x^0 + su \in \mathcal{D}$ und $x^0 + tv \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned} f(x^0 + su) - f(x^0) &= \mu(s, u) := \tfrac{1}{2} s^2 u^\mathsf{T} \nabla^2 f(x^0 + \theta(s, u)\, su)\, u, \\ f(x^0 + tv) - f(x^0) &= \nu(t, v) := \tfrac{1}{2}\, t^2 v^\mathsf{T} \nabla^2 f(x^0 + \theta(t, v)\, tv)\, v \end{aligned}$$

mit gewissen $\theta(s, u), \theta(t, v) \in (0, 1)$. Da die zweiten partiellen Ableitungen von f stetig sind, gilt wegen (4.22) auch $\mu(s, u) > 0$ und $\nu(t, v) < 0$, falls s und t nur nahe bei 0 sind, was auf

$$f(x^0 + \tfrac{1}{k} v) \;<\; f(x^0) \;<\; f(x^0 + \tfrac{1}{k} u) \quad \forall k \geq k'$$

mit einem gewissen $k' \in \mathbb{N}$ führt. Damit finden sich in jeder Umgebung von x^0 sowohl kleinere als auch grössere Werte im Vergleich zu $f(x^0)$, d.h., x^0 kann nicht Stelle eines lokalen Extremums sein. □

4.3.12 Übung. Man bestimme - sofern welche existieren - die lokalen Extremalstellen der auf $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ definierten Funktionen

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (2x^2+y^2)e^{-x^2-2y^2}, \\ g(x,y,z) &= \frac{1}{2}x^2+y^2-\frac{1}{2}z^2-2xy+xz+2yz-2y-2z, \\ h(x,y,z) &= x^2+y^2-2x-4y+\ln(1+z^2) \end{aligned}$$

und überprüfe gegebenenfalls, ob es sich um ein lokales Minimum oder Maximum handelt. ◇

4.4 Implizite Funktionen

4.4.1 Motivation I. Ist A eine reguläre (m,m)-Matrix und $b \in \mathbb{R}^m$ ein gegebener Vektor, so ist das lineare Gleichungssystem

$$Ay = b$$

genau dann lösbar (und zwar sogar eindeutig), wenn A invertierbar ist. Man kann auch sofort die eindeutige Lösung y^* aufschreiben, sie lautet

$$y^* = A^{-1}b.$$

Äquivalent zur Frage, eine Lösung von $Ay = b$ zu finden, ist es, nach der Existenz einer Nullstelle der

$$\text{linearen Vektorfunktion } \; f(y) := Ay - b,\; y \in \mathbb{R}^m,$$

zu fragen. Offenbar ist A die Jacobi-Matrix zu f und die Regularität von A ist äquivalent zur Existenz einer (global) eindeutigen Nullstelle von f.

Seien nun n stetig differenzierbare (im allgemeinen nichtlineare) Funktionen $f_1,\ldots,f_m$ von $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}$ gegeben. Fragen wir nach der Lösbarkeit (bzw. eindeutigen Lösbarkeit) und nach den Lösungen des nichtlinearen Gleichungssystems mit m Gleichungen in m Variablen mit Parametervektor ξ

$$f_i(y) = \xi_i,\; i = 1,\ldots,m,$$

so ist diese Frage ist nun nicht so einfach zu beantworten. Das gilt insbesondere, wenn man auch die Lösung(en) durch eine Formel darstellen oder zumindest numerisch bestimmen will, denken Sie an die parametrische nichtlineare Gleichung $e^{-y} - y = \xi$. Allgemein ist auch nicht zu erwarten, dass jede isolierte Lösung einer gegebenen Gleichung (also mit ξ fix) sogar global, d.h., auf dem gesamten Definitionsbereich, eindeutig ist, denken Sie an die einzelne nichtlineare Gleichung $\cos y - \sin y = 0$.

Wir werden deshalb folgende Frage untersuchen: Gegeben sei eine Nullstelle y^0 von f. Unter welchen Voraussetzungen an f existiert eine ε-Umgebung der Null in $\mathbb{R}^m$ und eine

δ-Umgebung von y^0, so dass für $\xi \in B^\circ(0, \varepsilon)$ die Gleichung

$$f(y) = \xi$$

eine eindeutige Lösung $y(\xi)$ in $B^\circ(y^0, \delta)$ hat? Ist dann $\xi \mapsto y(\xi)$ eine differenzierbare Funktion und kann man $Dy(\xi)$ durch eine Formel ausdrücken?

Die Beantwortung liefert der *Satz über Umkehrfunktionen*, er erweist sich als Spezialfall des *Satzes über implizite Funktionen*, der im folgenden Paragraphen motiviert wird. $\diamond$

4.4.2 Motivation II. Sei (x^0, y^0) ein gegebenes Güterbündel und f eine stetig differenzierbare Nutzenfunktion, so dass

$$\alpha := f(x^0, y^0).$$

Weicht man nun beim ersten Gut um $\triangle x$ ab, wie ist $\triangle y$, zu wählen, so dass weiterhin

$$f(x^0 + \triangle x, y^0 + \triangle y) = \alpha$$

gilt, d.h., dass das neue Güterbündel auf der gleichen Indifferenzkurve (d.h., Kurve zum Wert α) liegt?

Diese Frage ist Ihnen wohlbekannt, auch die Antwort: Zumindest näherungsweise kann man im Falle $f_y(x^0, y^0) \neq 0$ eine Lösung finden, indem man mittels der Grenzrate der Substitution $\triangle y \approx -(\, f_x(x^0, y^0)/f_y(x^0, y^0)\,)\ \triangle x$ setzt.

Die soeben betrachtete Aufgabe ordnet sich in das Problem ein, wann $f(x, y) = 0$ nahe (x^0, y^0) in eine differenzierbare Funktion $y = g(x)$ auflösbar ist. Unter $f_y(x^0, y^0) \neq 0$ gilt das, und es berechnet sich die Ableitung $g'(x^0)$ als

$$g'(x^0) = -f_x(x^0, y^0)/f_y(x^0, y^0).$$

Die explizite Lösung $y = g(x)$ für (x, y) in einer Umgebung von (x^0, y^0) wird damit zwar nicht ermittelt, aber kann durch die Linearisierung nahe $y^0 = g(x^0)$

$$y = y^0 + g'(x^0)(x - x^0)$$

approximiert werden.

Allgemeiner: Gegeben sei eine Vektorfunktion

$$F(x, y) = (F_1(x, y), \ldots, F_m(x, y))^\mathsf{T}$$

in den variablen Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^m$, F sei stetig differenzierbar, und es sei (x^0, y^0) derart, dass $F(x^0, y^0) = 0$ ist.

Unter welchen Voraussetzungen an F existiert eine ε-Umgebung von x^0 in $\mathbb{R}^n$ und eine δ-Umgebung von y^0 in $\mathbb{R}^m$, so dass die Gleichung

$$F(x, y) = 0$$

für jedes $x \in B^\circ(0, \varepsilon)$ eine Lösung $y(x)$ hat, die in $B^\circ(y^0, \delta)$ eindeutig ist?

Ist dann $x \mapsto y(x)$ eine differenzierbare Funktion und kann man $Dy(x)$ durch eine Formel ausdrücken?

Für eine Idee, welche Bedingungen man stellen muss, betrachten wir das lineare Gleichungssystem

$$F(x, y) := Ax + By - c = 0,$$

wobei A eine (m, n)-Matrix und B eine (m, m)-Matrix sowie $c \in \mathbb{R}^m$ sind. Zu jedem x gibt es genau dann eine eindeutige Lösung $y(x)$, wenn B invertierbar ist. Diese Lösung berechnet sich als

$$y(x) = B^{-1}(c - Ax).$$

B ist aber zu jedem festen x die Jacobi-Matrix der linearen Funktion $y \mapsto F(x, y)$. Also liegt die Vermutung nahe, dass die Regularität der Jacobi-Matrix von $y \mapsto F(x, y)$ in y^0 die gesuchte Voraussetzung ist. ◇

4.4.3 Bezeichnungen. Eine Vektorfunktion $F(x, y) = (F_1(x, y), \ldots, F_m(x, y))^\mathsf{T}$ in den variablen Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^m$ sei stetig differenzierbar auf einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$D_x F(x, y) = \begin{pmatrix} (F_1)_{x_1}(x, y) & \ldots & (F_1)_{x_n}(x, y) \\ \vdots & & \vdots \\ (F_m)_{x_1}(x, y) & \ldots & (F_m)_{x_n}(x, y) \end{pmatrix},$$

$$D_y F(x, y) = \begin{pmatrix} (F_1)_{y_1}(x, y) & \ldots & (F_1)_{y_m}(x, y) \\ \vdots & & \vdots \\ (F_m)_{y_1}(x, y) & \ldots & (F_m)_{y_m}(x, y) \end{pmatrix}.$$

Damit ist $D_x F(x, y)$ eine (m, n)-Matrix und $D_y F(x, y)$ eine (m, m)-Matrix, und man kann $DF(x, y)$ also kurz als grosse Matrix

$$DF(x, y) = (\, D_x F(x, y), D_y F(x, y)\,)$$

schreiben. In dieser Sprache gilt dann in einem Punkt (x^0, y^0) mit $F(x^0, y^0) = 0$, dass

$$F(x^0 + u, y^0 + v) = D_x F(x^0, y^0)u + D_y F(x^0, y^0)v + o(u, v) \tag{4.23}$$

mit $\|(u, v)\|^{-1} o(u, v) \to 0 \in \mathbb{R}^m$ für $(u, v) \to 0 \in \mathbb{R}^{m+n}$. ◇

4.4.4 Satz über implizite Funktionen. Seien $X \subset \mathbb{R}^n$ und $Y \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen und

$$F = (F_1, \ldots, F_m)^\mathsf{T} : X \times Y \to \mathbb{R}^m$$

stetig differenzierbar. Sei $(x^0, y^0) \in X \times Y$ ein Punkt mit

$$F(x^0, y^0) = 0, \quad \text{so dass die } (m, m)\text{-Matrix } D_y(x^0, y^0) \text{ invertierbar ist.}$$

Dann gelten folgende Aussagen:

(i) Es gibt es eine ε-Umgebung von x^0 in $\mathbb{R}^n$ und eine δ-Umgebung von y^0 in $\mathbb{R}^m$, so dass die Gleichung
$$F(x,y)=0$$
für jedes $x \in U := B^\circ(0,\varepsilon)$ eine Lösung $y=g(x)$ hat, die in $V := B^\circ(y^0,\delta)$ eindeutig ist. Speziell ist $y^0 = g(x^0)$.

(ii) Die in (i) definierte Funktion $g : U \to V$ ist stetig auf U und differenzierbar in x^0, und es gilt
$$Dg(x^0) = -\left(D_yF(x^0,y^0)\right)^{-1} D_xF(x^0,y^0). \tag{4.24}$$
$\diamond$

Beweis: Vgl. *O. Forster, Analysis 2*, §8, oder im Fall $m=n=1$ *P. Kall, Analysis für Ökonomen*, §5.4, Satz 5.14. $\square$

Der Satz über implizite Funktionen liefert also die Existenz von Umgebungen U und V und einer auf U erklärten Vektorfunktion $y=g(x)$, so dass für alle $(x,y) \in U \times V$ die Äquivalenz $F(x,y)=0 \;\Leftrightarrow\; y=g(x)$ gilt. Das führt auf die folgende Definition.

4.4.5 Definition. Wenn Eigenschaft (i) in Satz 4.4.4 gilt, so sagt man, dass durch die Gleichung $F(x,y)=0$ auf $U \times V$ ***implizit eine Funktion y=g(x)*** definiert ist. $\diamond$

4.4.6 Korollar. *Unter den Voraussetzungen von Satz 4.4.4 existieren eine Umgebung $U' \subset U$ von x^0 und $V' \subset V$ von y^0, so dass $D_y(x,y)$ für alle $(x,y) \in U' \times V'$ invertierbar ist und die Funktion $y=g(x)$ aus Satz 4.4.4 folgende zusätzliche Eigenschaften hat:*

Es gilt $g(U') \subset V'$, und es ist g auf U' stetig differenzierbar, wobei
$$Dg(x) = -\left(D_yF(x,g(x))\right)^{-1} D_xF(x,g(x)) \qquad \forall x \in U'. \tag{4.25}$$
$\diamond$

Beweis: Da die Funktion, die jeder (m,m)-Matrix C ihre Determinante $\det C$ zuordnet, stetig ist und g auf U sowie $(x,y) \in U \times V \mapsto D_yF(x,y)$ stetig sind, ist auch die zusammengesetzte Funktion
$$x \in U \mapsto \det D_yF(x,g(x)) \quad \text{stetig auf } U.$$
Da nach Voraussetzung $\det D_yF(x^0,g(x^0)) \neq 0$ ist, existieren eine offene Umgebung $U_1 \subset U$ von x^0 und eine offene Umgebung $V' \subset V$ von $y^0 = g(x^0)$, so dass $\det D_yF(x,y) \neq 0$ für $(x,y) \in U_1 \times V'$ ist. Dann ist $U' = U_1 \cap g^{-1}(V')$ eine offene Umgebung von x^0, da auch $g^{-1}(V')$ wegen der Stetigkeit von g offene Umgebung von x^0 ist. Somit folgt $g(U') \subset V'$.

Sei nun $\widetilde{x} \in U'$ beliebig. Dann existiert die Inverse $(D_y(\widetilde{x},g(\widetilde{x})))^{-1}$, und man kann im Punkt $(\widetilde{x},g(\widetilde{x}))$ Satz 4.4.4 anwenden. Folglich gilt die gesuchte Formel für $x=\widetilde{x}$. Insbesondere ist die Funktion $x \mapsto Dg(x)$ als Zusammensetzung der stetigen Funktionen $(x,y) \mapsto D_yF(x,y)$ und $x \mapsto y=g(x)$ in $x=\widetilde{x}$ stetig, was zu beweisen war. $\square$

4.4.7 Satz über Umkehrfunktionen. Es seien $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ eine offene Menge und die Funktion $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Ferner seien

$$y^0 \in \mathcal{D}, \quad f(y^0) = 0 \quad \text{und} \quad Df(y^0) \text{ invertierbar.}$$

Dann gibt es offene Umgebungen $V \subset \mathcal{D}$ von y^0 und U von $\xi^0 = f(y^0)$, so dass f die Menge V bijektiv auf U abbildet und die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : \; U \to V$$

stetig differenzierbar ist. Ferner gilt für alle $(\xi, y) \in U \times V$ mit $\xi = f(y)$

$$Df^{-1}(\xi) = (Df(y))^{-1}. \tag{4.26}$$

$\diamond$

Bemerkung. Unter den Voraussetzungen und mit den Aussagen des Satzes hat also das nichtlineare Gleichungssystem $f(y) = \xi$ für jedes $\xi \in U$ eine eindeutige Lösung $y = f^{-1}(\xi)$ in V, während das nichtlineare Gleichungssystem $f^{-1}(\xi) = y$ für jedes $y \in V$ eine eindeutige Lösung $\xi = f(y)$ in U hat.

Beweis von Satz 4.4.7. Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$F(\xi, y) = f(y) - \xi, \; \xi \in \mathbb{R}^m, \, y \in \mathcal{D}.$$

Es gilt offenbar $f(y) = \xi$ dann und nur dann, wenn $F(\xi, y) = 0$. Im Punkt (ξ^0, y^0) mit $\xi^0 = f(y^0)$ sind alle Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen und des nachfolgenden Korollars 4.4.6 erfüllt.

Nach diesem Korollar gibt es offene Umgebungen V' von y^0 und U von ξ^0 sowie eine stetig differenzierbare Funktion $g : U \to V'$, so dass gilt

$$\begin{array}{l}\text{Zu jedem } \xi \in U \text{ ist der Punkt } y = g(\xi) \text{ die einzige Lösung} \\ \text{von } F(\xi, y) = 0, \text{ d.h. von } f(y) = \xi, \text{ in der Umgebung } V'.\end{array} \tag{4.27}$$

Schränkt man V' auf die Menge $V = V' \cap f^-(U)$ von y^0 ein ($f^-(U)$ bezeichnet hier das Urbild von U unter der Abbildung f), so sagt (4.27) folgendes aus: f bildet die Menge V bijektiv auf U ab, und es ist $g = f^{-1}$.

Die Menge V ist offene Umgebung von y^0, weil $f^-(U)$ als Urbild der offenen Umgebung von $\xi^0 = f(y^0)$ unter der stetigen Funktion f selbst offene Umgebung von y^0 ist und sich somit V als Durchschnitt zweier offener Umgebungen von y^0 ergibt. Damit ist die erste Aussage bewiesen.

Die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion ergibt sich nun als Spezialisierung aus Formel (4.25), indem man für $F(\xi, y) = f(y) - \xi$ sofort ausrechnet, dass

$$D_\xi F(\xi, y) = -I \quad (I \text{ Einheitsmatrix}) \quad \text{und} \quad D_y F(\xi, y) = Df(y),$$

also mit $\xi = f(y)$

$$D(f^{-1})(\xi) = Dg(\xi) = -Df(y)^{-1}(-I) = Df(y)^{-1}$$

folgt. Damit ist auch die Formel (4.26) bewiesen. □

4.4.8 Übung. Leiten Sie die Formel (4.26) auf alternative Weise her, indem Sie als bekannt annehmen, dass $y = g(\xi)$ stetig differenzierbar ist und $f(g(\xi)) = \xi$ gelten muss. (Hinweis: Kettenregel) ◇

4.4.9 Bemerkung. Im Spezialfall $m = 1$ reduziert sich die Formel (4.26) auf die aus der *Mathematik I* bekannte Formel

$$(f^{-1})'(\xi_0) = \frac{1}{f'(y_0)} \quad \text{mit } \xi_0 = f(y_0).$$

◇

4.4.10 Übung. Folgende Gleichungen

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - u + v &= 0 \\ -2x + y + u + v^3 &= -1 \end{aligned}$$

definieren auf einer geeigneten Umgebung der Lösung $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (1, 0, 1, 0)$ implizite Funktionen $x = g(u, v), \quad y = h(u, v)$. Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen dieser impliziten Funktionen im Punkt $(u_0, v_0) = (1, 0)$. ◇

4.4.11 Übung. Folgende Gleichungen

$$\begin{aligned} ye^{x-t} &= 1 \\ x^2 - yt &= 0 \end{aligned}$$

definieren auf einer geeigneten Umgebung von $(1, 1, 1)$ eine implizite Funktionen $(x, y) = g(t)$. Bestimmen Sie $g'(1)$. ◇

4.4.12 Übung. In einem Angebots- und Nachfragemodell mit Preis p und Steuer t,

$$D = f(p + t) \quad \text{und} \quad S = g(p),$$

wobei f und g stetig differenzierbare Funktionen mit $f' < 0$ und $g' > 0$ sind, definiert die Gleichgewichtsbedingung

$$f(p + t) = g(p)$$

den Preis p implizit als eine stetig differenzierbare Funktion $p = P(t)$. Finden Sie einen Ausdruck dP/dt. Zeigen Sie, dass für die Funktion $\varphi(t) = P(t) + t$ stets $0 < \varphi'(t) < 1$ gilt (Vorzeichenbedingungen für f' und g' beachten). ◇

4.5 Konvexe Mengen und konvexe Funktionen

4.5.1 Definition. Eine Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ heisst ***konvex***, falls mit zwei Punkten aus X auch ihre Verbindungsstrecke in X liegt, d.h.,

$$x, y \in X\,,\ \lambda \in (0,1) \quad \Rightarrow \quad \lambda x + (1-\lambda)y \in X.$$

Die leere Menge ist per definitionem konvex.

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge. Eine Funktion $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heisst ***konvex***, falls gilt:

$$x, y \in X\,,\ \lambda \in (0,1) \ \Rightarrow \ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

$g : X \to \mathbb{R}$ heisst ***konkav***, falls $-g$ konvex ist. ◇

4.5.2 Eigenschaften konvexer Mengen/Funktionen. Offenbar gilt:

(i) Sind $X_i \subset \mathbb{R}^n$, $i \in I$ (I beliebige Indexmenge) konvexe Mengen, so ist auch $\bigcap_{i\in I} X_i$ eine konvexe Menge.

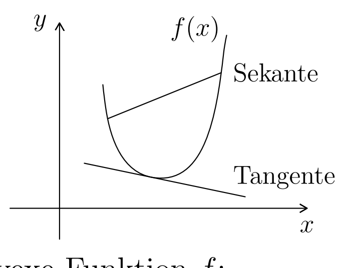
(ii) Die nichtleeren konvexen Mengen in $\mathbb{R}$ sind einelementig oder Intervalle.

(iii) Sind f und g konvexe Funktionen auf einer konvexen Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ und μ eine positive reelle Zahl, so sind auch die Funktionen $f + g$ und μf konvex.

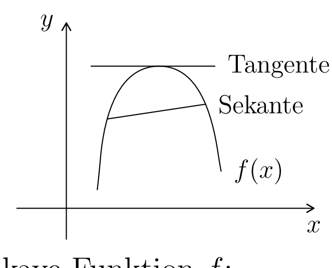
(iv) Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge, so ist zu jedem $\nu \in \mathbb{R}$ die *untere Niveaumenge* $\{x \in X \,|\, \varphi(x) \le \nu\}$ einer konvexen Funktion $\varphi : X \to \mathbb{R}$ eine konvexe Menge.

(v) Ist $\|\cdot\|$ irgendeine Norm im $\mathbb{R}^n$, so ist die Funktion $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|x\|$ konvex. ◇

4.5.3 Repetition: Konvexe reelle Funktionen. Aus der Vorlesung *Mathematik I* kennen wir folgende anschauliche Charakterisierung konvexer und konkaver Funktionen: über die Lage der Sekanten im Graphen, beim Studium *differenzierbarer Funktionen* auch über die Lage der Tangenten an den Graphen:



konvexe Funktion f:
alle Sekanten oberhalb gph f
alle Tangenten unterhalb gph f



konkave Funktion f:
alle Sekanten unterhalb gph f
alle Tangenten oberhalb gph f

◇

4.5.4 Satz: Konvexitäts- und Konkavitätskriterium für reelle Funktionen. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann sind die folgenden Aussagen paarweise zueinander äquivalent:

1. f ist konvex über D.
2. $f(\xi) \geq f(x) + f'(x)(\xi - x)$ für alle $\xi, x \in D$.
3. f' ist monoton steigend auf D (d.h., wenn f zweimal differenzierbar ist, gilt $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in D$).

Ferner sind die folgenden Aussagen paarweise zueinander äquivalent:

a. f ist konkav über D.
b. $f(\xi) \leq f(x) + f'(x)(\xi - x)$ für alle $\xi, x \in D$.
c. f' ist monoton fallend auf D (d.h., wenn f zweimal differenzierbar ist, gilt $f''(x) \leq 0$ für alle $x \in D$).

Zum Beweis vgl. *P. Kall, Analysis für Ökonomen*, Abschnitt 4.4. Vergleicht man die Funktionsgleichung $y = f(x)$ mit der Gleichung der Tangente an $\operatorname{gph} f$ in $(x, f(x))$,

$$y = f(x) + f'(x)(\xi - x),$$

werden die o.a. Charakterisierungen anschaulich sofort klar!

Ökonomische Interpretation von 1. $\Leftrightarrow$ 3. und *a.* $\Leftrightarrow$ *c.* z.B.:

- *konvexe Kostenfunktion* $K \equiv$ *zunehmende Grenzkosten* K'
- *konkave Ertragsfunktion* $E \equiv$ *abnehmender Grenzertrag* E',

vgl. wieder *P. Kall, Analysis für Ökonomen*, Abschnitt 4.4. $\diamond$

4.5.5 Lemma. *Die Funktion* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *ist genau dann konvex auf einer konvexen Menge* $X \subset D$*, wenn zu je zwei Punkten* $x, y \in X$ *die jeweilige Funktion in einer Variablen*

$$t \to h(t) := f((1-t)x + ty),$$

auf dem Intervall $I = [0, 1]$ *konvex ist.* $\diamond$

Zum Beweis muss man nur die Definitionen einer konvexen Funktion bzw. einer konvexen Menge anwenden, er sei den Lesern als Übung überlassen.

4.5.6 Satz. (Konvexitätskriterien)

Seien $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und X eine nichtleere konvexe Teilmenge von D. Dann gilt:

1. *f ist konvex auf X genau dann wenn für alle Punkte $x, y \in X$ die Ungleichung $f(y) \geq f(x) + (y-x)^\mathsf{T} \nabla f(x)$ gilt.*

2. *Hat f sogar stetige zweite partielle Ableitungen nach allen Variablen, so ist f auf X konvex genau dann, wenn für jeden Punkt $x \in X$ die Hesse-Matrix $\nabla^2 f(x)$ positiv semidefinit ist.* ◇

Beweis. Seien $x, y \in X$ beliebig. Man wende Lemma 4.5.5 und die (verallgemeinerte) Kettenregel an:

$$h(t) := f((1-t)x + ty) = f(x + t(y-x))$$

hat die erste Ableitung

$$h'(t) = (y-x)^\mathsf{T} \nabla f(x + t(y-x))$$

und (falls f zweimal differenzierbar ist) die zweite Ableitung

$$h''(t) = (y-x)^\mathsf{T} \nabla^2 f(x + t(y-x))(y-x),$$

folglich mit $u = y - x$

$$h'(0) = (y-x)^\mathsf{T} \nabla f(x) \quad \text{und} \quad h''(0) = u^\mathsf{T} \nabla^2 f(x) u.$$

Nun setze in Satz 4.5.4 für die *dort* betrachteten Symbole gerade $f := h$, $\xi := 1$ und $x := 0$, dann folgen aus Satz 4.5.4 sofort die Behauptungen. □

4.5.7 Satz. (Konkavitätskriterien)

Unter den Voraussetzungen von Satz 4.5.6 gilt, dass f genau dann konkav ist, wenn für alle Punkte $x, y \in X$ die Ungleichung $f(y) \leq f(x) + (y-x)^\mathsf{T} \nabla f(x)$ gilt. Im Falle zweimaliger Differenzierbarkeit gilt dann also, dass f konkav ist, falls für jeden Punkt $x \in X$ die Hesse-Matrix $\nabla^2 f(x)$ negativ semidefinit ist. ◇

Beweis. Folgt aus Satz 4.5.6, da $-f$ konvex ist. □

Für zweimal stetig differenzierbare Funktionen kann also die Überprüfung der Konvexität bzw. Konkavität auf den Nachweis von Definitheitseigenschaften zurückgeführt werden. Man vergleiche auch die Kriterien in unserem Skript, die in Punkt 4.3.9 angegeben wurden.

Mit Eigenschaft 1 aus Satz 4.5.6 folgt nun auch direkt das notwendige und hinreichende Optimalitätskriterium erster Ordnung für die Minimierung konvexer Funktionen (Maximierung konkaver Funktionen) im Falle von Funktionen in n Variablen – das verallgemeinert das aus der *Mathematik I* für *reelle* Funktionen bekannte Kriterium.

4.5.8 Satz. (Notwendiges und hinreichendes Optimalitätskriterium erster Ordnung)
Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, konvexe Menge und $f : D \to \mathbb{R}$ eine konvexe, stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt:

1. *f besitzt in $x^0 \in D$ ein globales Minimum genau dann wenn $\nabla f(x^0) = 0$ gilt.*
2. *Die konkave Funktion $g = -f$ besitzt in $x^0 \in D$ ein globales Maximum genau dann wenn $\nabla g(x^0) = 0$ gilt.* $\diamond$

Beweis. Aussage 1: Da D offen ist, folgt $\nabla f(x^0) = 0$ für jeden globalen Minimalpunkt x^0 aus dem notwendigen Optimalitätskriterium 4.3.7. Umgekehrt, wenn $\nabla f(x^0) = 0$ gilt, schliessen wir wegen der Konvexität von f sofort für jedes $x \in D$

$$f(x) \geq f(x^0) + (x - x^0)^\mathsf{T} \nabla f(x^0) = f(x^0),$$

also nimmt f in x^0 ihr globales Minimum an. Aussage 2 beweist man analog. $\square$

4.5.9 Übung.

(i) Man zeige, dass die Funktion

$$f(x, y, z) = x^2 - 2xy + y^2 - z, \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

auf $\mathbb{R}^3$ konvex ist.

(ii) Offenbar ist die Funktion

$$g(x, y, z) = f(x, y, z) + z^2, \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

als Summe von zwei auf $\mathbb{R}^3$ konvexen Funktionen (nämlich von f und $(x, y, z) \mapsto z^2$) wieder konvex. Überprüfen Sie zur Übung die Konvexität von g mit dem Hauptabschnittsdeterminanten - Kriterium.

(iii) In welchen Punkten nimmt g ihr globales Minimum auf $\mathbb{R}^3$ an? $\diamond$

Kapitel 5

Optimierungsprobleme unter Nebenbedingungen

Nichtlineare Optimierungsprobleme

In diesem Kapitel betrachten wir die folgende Standardaufgabe

$$\text{(P)} \qquad \begin{array}{ll} \text{Minimiere } f(x) & \\ \text{bezüglich} & g_i(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m\,,\ h_j(x) = 0,\ j = 1, \ldots, r\,, \end{array} \tag{5.1}$$

wobei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g = (g_1, \ldots, g_m)^\mathsf{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $h = (h_1, \ldots, h_r)^\mathsf{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$ stetig differenzierbare Funktionen seien. Die Menge

$$M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \leq 0,\ h(x) = 0\}$$

heisst *zulässiger Bereich* oder *Restriktionsbereich* (auch *Menge der zulässigen Punkte* oder *Restriktionsmenge*) von (P), ihre Elemente heissen *zulässige Punkte* von (P). Kurz schreiben wir (P) auch als

$$\min\{f(x) \mid x \in M\}.$$

Genügt $x^0 \in M$ der Bedingung

$$f(x^0) \leq f(x) \quad \forall x \in M,$$

so heisst x^0 *globaler Minimalpunkt* oder *globale Lösung* der Aufgabe (P), existiert dagegen ein $\varepsilon > 0$, so dass nur

$$f(x^0) \leq f(x) \quad \forall x \in M \cap B^\circ(x^0, \varepsilon),$$

so heisst x^0 *lokaler Minimalpunkt* oder *lokale Lösung* der Aufgabe (P). Die Aufgabe (P) heisst *nichtlineares Optimierungsproblem* oder *nichtlineares Programm* unter *Gleichungs- und Ungleichungsnebenbedingungen.* Statt Nebenbedingungen sagt man auch *Restriktionen.*

Ausnahme: Sind alle auftretenden Funktionen f, g_i und h_j affin-linear (d.h., von der Form $a^\mathsf{T} x - b$ mit $a \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}$), heisst (P) ein *lineares Optimierungsproblem* oder *lineares Programm.*

Sind nur die Funktionen g_i und h_j ($\forall i \, \forall j$) affin-linear, spricht man von einem (nichtlinearen) Optimierungsproblem mit *linearen Restriktionen.*

Sind die Funktionen f und g_i konvex und h_j affin-linear, so heisst das nichtlineare Optimierungsproblem (P) speziell ein *konvexes Optimierungsproblem* oder *konvexes Programm.*

Die Betrachtung von *Minimierungproblemen* und *Ungleichungen in* $\leq$*-Form* ist keine Einschränkung der Allgemeinheit, denn es gilt stets

$$\max\{f(x) \,|\, x \in M\} = -\min\{-f(x) \,|\, x \in M\}$$

sowie $g_i(x) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; -g_i(x) \leq 0$.

5.1 Lagrange-Bedingungen

Wir betrachten hier nichtlineare Optimierungsproblemen unter Gleichungsnebenbedingungen, d.h., eine Aufgabe ohne Ungleichungen:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiere } f(x) & \\ \text{bezüglich} & h_j(x) = 0, \;\; j = 1, \ldots, r\,, \end{array} \tag{5.2}$$

wobei $h_1, \ldots, h_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen seien. Wir setzen wieder $h = (h_1, \ldots, h_r)^\mathsf{T}$.

5.1.1 Satz. *Sei x^0 ein lokaler Minimalpunkt der Aufgabe (5.2), und es sei vorausgesetzt, dass*

$$\{\nabla h_1(x^0), \ldots, \nabla h_r(x^0)\} \text{ linear unabhängig.}$$

Dann existieren Zahlen $v_1, \ldots, v_r \in \mathbb{R}$, so dass

$$\nabla f(x^0) + \sum_{j=1}^{r} v_j \nabla h_j(x^0) = 0. \tag{5.3}$$

Die Bedingung (5.3) [1] *und die Zulässigkeitsforderung $h(x^0) = 0$ werden unter dem Namen* ***Lagrange-Bedingungen*** *zusammengefasst, die Zahlen $v_1, \ldots, v_r$ heissen die dem Punkt x^0 zugeordneten* ***Lagrange-Multiplikatoren****.* ◇

[1] Aus der *Mathematik I* kennen Sie die äquivalente Form $\nabla f(x^0) - \sum_{j=1}^{r} v_j \nabla h_j(x^0) = 0$.

Beweis. Nach Voraussetzung hat die Jacobi-Matrix $Dh(x^0) = (\nabla h_1(x^0) \ldots \nabla h_r(x^0))^T$ den Rang r. Speziell gilt also, da $\nabla h_j(x^0) \in \mathbb{R}^n$, dass $r \leq n$ ist. Wir setzen $r < n$ voraus, da andernfalls die Aussage trivial ist: (5.3) hätte dann eine eindeutige Lösung v.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien in der Matrix

$$Dh(x^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_{n-r}} & \frac{\partial h_1}{\partial x_{n-r+1}} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_r}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_r}{\partial x_{n-r}} & \frac{\partial h_r}{\partial x_{n-r+1}} & \cdots & \frac{\partial h_r}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

die letzten r Spalten linear unabhängig (sonst nummeriere die Variablen um), und wir schreiben [2]

$$\xi = (x_1, \ldots, x_{n-r}), \quad \eta = (x_{n-r+1}, \ldots, x_n).$$

Die zugeordnete Kurzschreibweise für die Restriktionsmenge ist dann

$$M = \{(\xi, \eta) \mid h(\xi, \eta) = 0\},$$

die für die Jacobi-Matrix in $x = (\xi, \eta)$ ist

$$Dh(\xi, \eta) = (D_\xi h(\xi, \eta), D_\eta h(\xi, \eta)).$$

Nach Voraussetzung ist $D_\eta h(\xi^0, \eta^0)$ invertierbar. Nach dem Satz über implizite Funktionen und dem ihm nachfolgenden Korollar gelten folgende Aussagen:

(i) Es gibt $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$, so dass die Gleichung $h(\xi, \eta) = 0$ für jedes $\xi \in U := B^\circ(\xi^0, \varepsilon)$ in $V = B^\circ(\eta^0, \delta)$ eine eindeutige Lösung $\eta = g(\xi)$ hat, wobei $\eta^0 = g(\xi^0)$ gilt.

(ii) Die so definierte Funktion $\eta = g(\xi)$ bildet U stetig differenzierbar in V ab, und es gilt

$$Dg(\xi^0) = -(J_\eta)^{-1} J_\xi, \tag{5.4}$$

wobei $J_\eta = D_\eta h(\xi^0, \eta^0)$ und $J_\xi = D_\xi h(\xi^0, \eta^0)$.

Insbesondere genügt damit die Zielfunktion f für alle $x = (\xi, \eta) \in (U \times V) \cap M$ der Formel

$$f(\xi, \eta) = f(\xi, g(\xi)).$$

Da $x^0 = (\xi^0, \eta^0)$ lokaler Minimalpunkt der Aufgabe (5.2) ist, existiert ein $r > 0$, so dass $f(x^0) \leq f(x)$ für alle $x \in B^\circ(x^0, r)$ ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $B^\circ(x^0, r)$ bezüglich der Maximumnorm $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ definiert ist, dann gilt $B^\circ(x^0, r) = B^\circ(\xi^0, r) \times B^\circ(\eta^0, r)$. Sei r so klein, dass $B^\circ(x^0, r) \subset U \times V$, dann folgt

$$f(\xi^0, g(\xi^0)) = f(\xi^0, \eta^0) \leq f(\xi, \eta) = f(\xi, g(\xi)) \quad \forall x = (\xi, \eta) \in B^\circ(x^0, r) \cap M,$$

[2] Um ein zu häufiges Auftreten des Transponiertheitsszeichens zu vermeiden, schreiben wir oft $x = (x_1, \ldots, x_n)$ statt $x = (x_1, \ldots, x_n)^\mathsf{T}$, beim Schreiben von Skalar- oder Matrizenprodukten sind wir allerdings konsequent und müssen das auch sein!

das heisst, mit $\varphi(\xi) := f(\xi, g(\xi))$,

$$\varphi(\xi^0) \leq \varphi(\xi) \quad \forall \xi \in B^\circ(\xi^0, r).$$

Damit nimmt φ an der Stelle ξ^0 ein (freies) lokales Minimum an. Folglich

$$\nabla\varphi(\xi^0) = 0.$$

Nach der Kettenregel gilt – wir schreiben dabei $\nabla_\xi f(\xi,\eta)^\mathsf{T}$ und $\nabla_\eta f(\xi,\eta)^\mathsf{T}$ für $D_\xi f(\xi,\eta)$ bzw. $D_\eta f(\xi,\eta)$, da f reellwertig ist, analog für φ –

$$\nabla\varphi(\xi^0)^\mathsf{T} = \nabla_\xi f(\xi^0,\eta^0)^\mathsf{T} + \nabla_\eta f(\xi^0,\eta^0)^\mathsf{T} Dg(\xi^0) = 0.$$

Nach (5.4) folgt dann

$$0 = \nabla\varphi(\xi^0)^\mathsf{T} = \nabla_\xi f(\xi^0,\eta^0)^\mathsf{T} - \nabla_\eta f(\xi^0,\eta^0)^\mathsf{T}(J_\eta)^{-1}J_\xi = 0. \tag{5.5}$$

Wir setzen nun

$$v^\mathsf{T} = -\nabla_\eta f(\xi^0,\eta^0)^\mathsf{T}(J_\eta)^{-1}, \tag{5.6}$$

und wir haben folglich (für die erste Gleichung setze man (5.6) in (5.5) ein, für die zweite Gleichung multipliziere man (5.6) von rechts mit J_η)

$$\nabla_\xi f(\xi^0,\eta^0)^\mathsf{T} + v^\mathsf{T} J_\xi = 0, \quad \nabla_\eta f(\xi^0,\eta^0)^\mathsf{T} + v^\mathsf{T} J_\eta = 0,$$

das ist die mit den obigen Definitionen von J_ξ und J_η die behauptete Bedingung (5.3) in Vektor-Matrix-Schreibweise. Das beschliesst den Beweis. □

5.1.2 Schreibweise mit der Lagrange-Funktion. Die Funktion

$$L(x,v) := f(x) + \sum_{j=1}^{r} v_j h_j(x), \ (x,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r,$$

heisst *Lagrange-Funktion.*

Die Lagrange-Bedingungen sind – wie der soeben gezeigte Satz sagt – notwendige Optimalitätsbedingungen 1. Ordnung in einem lokalen Minimalpunkt x^0. Sie können mit der Lagrangefunktion auch so geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_i}(x^0,v) &= \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}(x^0) + \sum_{j=1}^{r} v_j \frac{\partial h_j(x^0)}{\partial x_i}(x^0) &&= 0, \quad i = 1,\dots,n, \\ \frac{\partial L}{\partial v_j}(x^0,v) &= h_j(x^0) &&= 0, \quad j = 1,\dots,r. \end{aligned}$$

In Kurzschreibweise:

$$\nabla_x L(x^0,v) = 0, \quad \nabla_v L(x^0,v) = 0.$$

Im Falle $n = 2$ und $r = 1$ erkennen Sie unschwer die Lagrange-Bedingungen aus der *Mathematik I* wieder. ◇

5.1.3 Beispiel. Die Regularitätsbedingung

$$\{\nabla h_1(x^0), \ldots, \nabla h_r(x^0)\} \text{ linear unabhängig}$$

ist wichtig für die Gültigkeit der Lagrange-Bedingungen. Man betrachte die Aufgabe

$$\min\{\tfrac{1}{2}x^2 + y \mid \tfrac{1}{2}(x-y)^2 = 0\},$$

für die der Punkt $(-1,-1)$ offenbar optimal ist (Substitution $y = x$ anwenden). Die Lagrange-Bedingungen

$$x + v(x-y) = 0, \quad 1 - v(x-y) = 0, \quad \tfrac{1}{2}(x-y)^2 = 0,$$

sind aber widersprüchlich. Der Gradient der Restriktionsfunktion ist in allen zulässigen Punkten gleich dem Nullvektor.

Interessant: Beschreibt man die Restriktionsmenge äquivalent durch $x - y = 0$, gelten die Regularitätsbedingung und die Lagrange-Bedingung. Die Regularitätsbedingung ist also eine Forderung an die analytische Beschreibung des zulässigen Bereichs, wir kommen darauf im nächsten Abschnitt zurück. ◇

5.2 Kuhn-Tucker-Bedingungen

Wir betrachten in diesem Abschnitt die Standardaufgabe (P) mit Gleichungs- und Ungleichungsrestriktionen, d.h.,

$$\text{(P)} \qquad \begin{array}{ll} \text{Minimiere } f(x) & \\ \text{bezüglich} & g_i(x) \le 0,\ i = 1,\ldots,m\,,\ h_j(x) = 0,\ j = 1,\ldots,r\,, \end{array}$$

wobei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g = (g_1,\ldots,g_m)^\mathsf{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $h = (h_1,\ldots,h_r)^\mathsf{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$ stetig differenzierbare Funktionen sind.

5.2.1 Idee notwendiger Optimalitätsbedingungen. Sei der zulässige Bereich M zunächst eine konvexe Menge und sei $x^0 \in M$ eine lokale Lösung von (P).

Wir betrachten nun eine beliebige *zulässige Richtung*, d.h., einen Vektor y, so dass $x^0 + ty \in M$ wenigstens für $t \in [0, t_0)$ mit $t_0 > 0$ erfüllt ist. Dann folgt sofort aus der stetigen Differenzierbarkeit von f sowie der Optimalität in x^0 die Existenz eines $t_1 \in (0, t_0]$, so dass

$$f(x^0) \le f(x^0 + ty) = f(x^0) + (ty)^\mathsf{T}\nabla f(x^0 + \theta t y) \quad \forall t \in (0, t_1) \tag{5.7}$$

mit gewissen $\theta = \theta(t) \in (0,1)$. Also ergibt sich nach Division durch t und Grenzübergang $t \downarrow 0$ als *notwendige Optimalitätsbedingung*

$$y^\mathsf{T}\nabla f(x^0) \ge 0,$$

d.h., die Richtungsableitungen von f in x^0 in zulässigen Richtungen y sind nichtnegativ.

Im Falle nichtkonvexer Restriktionen kann der zulässige Bereich M sehr kompliziert aussehen, so dass man in diesem Falle die Änderungsrichtung y etwas allgemeiner fassen muss, wir definieren dazu den Begriff des Tangentialkegels. ◇

5.2.2 Definition. Sei $x^0 \in M$.[3] Dann heisst die Menge

$$T(M,x^0) := \left\{ y \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists \{x^k\} \subset M,\ x^k \to x^0, \\ \exists \{t_k\} \subset (0,+\infty),\ t_k \downarrow 0 : \\ y = \lim_{k\to\infty} t_k^{-1}(x^k - x^0) \end{array} \right\} \tag{5.8}$$

Tangentialkegel an M im Punkt $\mathbf{x^0}$.

Es ist leicht einzusehen, dass stets $0 \in T(M,x^0)$ und mit $t > 0$ und $y \in T(M,x^0)$ auch $ty \in T(M,x^0)$ gilt, d.h., es handelt sich nach Definition um einen Kegel. Ferner kann man ohne Mühe zeigen, dass $T(M,x^0)$ eine abgeschlossene Menge ist. $\diamond$

5.2.3 Beispiel. Es seien $x^0 = (x_1^0, x_2^0) := (1,0)$.

$$M = \{(x_1,x_2) \,|\, g_1(x_1,x_2) := x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0, \quad g_2(x_1,x_2) := x_2 - \tfrac{1}{2} \le 0\}.$$

Dann ist offenbar $T(M,x^0) = \{(y_1,y_2) \,|\, y_1 \le 0\}$, das ist eine abgeschlossene Halbebene.

Begründung: Zunächst sehen wir, dass die Restriktion $g_2(x) \le 0$ in einer kleinen Umgebung von $x^0 = (1,0)$ keine Rolle spielt, denn sie ist dort wegen der Stetigkeit von g_2 automatisch erfüllt, da ja $g_2(1,0) = 0 < \frac{1}{2}$. Man sagt, diese Restriktion ist *nicht aktiv*.

Richtungen $ty = (ty_1, ty_2)$ mit $y_1 < 0$ und kleinen $t > 0$ "zeigen in die Menge M hinein", und man kann in (5.8) eine Folge von Punkten der Form

$$x = x^0 + ty \text{ mit } t \downarrow 0$$

nehmen, während man für die Konstruktion von Richtungen der Form $y = (0, y_2)$ eine Folge von Punkten x auf dem Kreisbogen wählen muss: es handelt sich dann bei $x^0 + ty$ um Punkte auf der Tangente an den Kreis M im Punkt $x^0 = (1,0)$ im üblichen Sinne.

Man beachte, dass in diesem Beispiel gilt

$$\nabla g_1(1,0)^\mathsf{T} = (2,0)$$

und folglich (wegen $y_1 \le 0 \Leftrightarrow 2y_1 \le 0$)

$$T(M,(1,0)) = \{y \in \mathbb{R}^2 \,|\, \nabla g_1(1,0)^\mathsf{T} y = 2y_1 \le 0\}.$$

$\diamond$

5.2.4 Übung. Für die Menge $M = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, g_i(x) \le 0,\ i = 1,2,3,\ h(x) = 0\}$ und den Punkt $x^0 = (0,1,0)$ sowie

$$g_1(x) = x_1 + x_2 + x_3 - 1,\ g_2(x) = -x_1,\ g_3(x) = -x_2, \quad h(x) = x_3$$

[3] Die Definition ist auch für eine beliebige nichtleere Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ sinnvoll, nicht nur für die Restriktionsmenge von (P).

überlege man geometrisch-anschaulich, dass

$$T(M, x^0) = \{y \in \mathbb{R}^3 \,|\, y_1 + y_2 + y_3 \leq 0,\ y_1 \leq 0,\ y_3 = 0\}$$

gelten muss. In x^0 (und damit für x nahe x^0) sind die Ungleichungen $g_1(x) \leq 0$ und $g_2(x) \leq 0$ als Gleichungen erfüllt, also *aktiv*, und es gilt analog zu Beispiel 5.2.3

$$T(M, (0,1,0)) = \{y \in \mathbb{R}^2 \,|\, \nabla g_1(0,1,0)^\mathsf{T} y \leq 0,\ \nabla g_2(0,1,0)^\mathsf{T} u \leq 0, \nabla h(0,1,0)^\mathsf{T} u = 0\},$$

die *inaktive* Restriktion $g_3(x) \leq 0$ spielt keine Rolle. $\diamond$

5.2.5 Satz. (Allgemeine notwendige Optimalitätsbedingung 1. Ordnung). *Sei x^0 lokaler Minimalpunkt des nichtlinearen Optimierungsproblems (P). Dann gilt*

$$\nabla f(x^0)^\mathsf{T} y \geq 0 \qquad \forall y \in T(M, x^0). \tag{5.9}$$

$\diamond$

Beweis. Sei $y \in T(M, x^0)$. Dann existieren Folgen

$$\{x^k\} \subset M,\ x^k \to x^0, \quad \{t_k\} \subset (0, +\infty),\ t_k \downarrow 0,$$

so dass

$$y = \lim_{k\to\infty} (x^k - x^0)/t_k \ \text{ und } \ f(x^k) \geq f(x^0)\ \forall k.$$

Mit $y^k := (x^k - x^0)/t_k$ gilt $x^k = x^0 + t_k y^k$ und somit

$$0 \leq f(x^k) - f(x^0) = t_k (y^k)^\mathsf{T} \nabla f(x^0) + o(t_k y^k),$$

so dass nach Division durch t_k und Grenzübergang wegen $y^k \to y$

$$y^\mathsf{T} \nabla f(x^0) \geq 0$$

folgt, was zu zeigen war. $\square$

5.2.6 Bemerkung. Wir werden weiter unten zeigen, dass für

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, h_j(x) = 0,\ j = 1, \dots, r\}$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen h_j unter der Regularitätsvoraussetzung

$$\{\nabla h_1(x^0), \dots, \nabla h_r(x^0)\} \text{ linear unabhängig} \tag{5.10}$$

der Tangentialkegel an M in x^0 die folgende Darstellung hat:

$$T(M, x^0)) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid (\nabla h_j(x^0))^\mathsf{T} y = 0,\ j = 1, \dots, r\}.$$

Die notwendige Optimalitätsbedingung von Satz 5.2.5 lautet somit (man beachte, dass mit $y \in T(M, x^0)$ auch $-y \in T(M, x^0)$ gilt):

$$\nabla h_1(x^0)^\mathsf{T} y = \ldots = \nabla h_r(x^0)^\mathsf{T} y = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla f(x^0)^\mathsf{T} y = 0,$$

d.h., der Vektor $\nabla f(x^0)$ ist linear abhängig von den Vektoren $\nabla h_j(x^0)$, $j = 1, \ldots, r$. Mit anderen Worten: Es existieren Zahlen $v_1, \ldots, v_r$, so dass

$$\nabla f(x^0) + \sum_{j=1}^{r} v_j \nabla h_j(x^0) = 0.$$

Das sind gerade die Lagrange-Bedingungen. Die Argumentation gilt auch rückwärts, also sind für Optimierungsprobleme unter Gleichungsnebenbedingungen und unter der Regularitätsvoraussetzung (5.10) die allgemeine notwendige Bedingung von Satz 5.2.5 und die Lagrange-Bedingungen äquivalent.

Um die allgemeinen notwendigen Bedingungen (5.9) auch bei Ungleichungsrestriktionen in eine Form zu bringen, die ähnlich den Lagrange-Bedingungen ist – sie heissen Kuhn-Tucker-Bedingungen –, benötigen wir einerseits das Lemma von Farkas über die Charakterisierung der sogenannten *nichtnegativen linearen Abhängigkeit* und andererseits eine geeignete Regularitätsbedingung. ◇

5.2.7 Lemma von Farkas. Es seien A eine (m, n)-Matrix und $b \in \mathbb{R}^m$. Dann ist die Menge $\{z \in \mathbb{R}^n \mid Az = b,\ z \geq 0\}$ genau dann nicht leer, wenn für jedes $u \in \mathbb{R}^m$ mit $A^\mathsf{T} u \leq 0$ auch $b^\mathsf{T} u \leq 0$ gilt.

Mit anderen Worten: b lässt sich genau dann als nichtnegative Linearkombination der Spaltenvektoren von A schreiben, wenn $A^\mathsf{T} u \leq 0$ die Ungleichung $b^\mathsf{T} u \leq 0$ impliziert. ◇

Beweis. Vgl. Vorlesung oder *P. Kall, Mathematische Methoden des Operations Research*, Teubner, 1976, Satz 1.1 oder *P. Kall, Analysis für Ökonomen*, Abschnitt 5.5. □

5.2.8 Definition. Sei M der zulässige Bereich von (P) und $x^0 \in M$. Die Indexmenge der in x^0 *aktiven Ungleichungen* (auch *bindenden Ungleichungen*) ist durch

$$I(x^0) := \{i \in \{1, \ldots, m\} \mid g_i(x^0) = 0\}$$

definiert. Die Menge

$$K(M, x^0) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \nabla g_i(x^0)^\mathsf{T} y \leq 0,\ i \in I(x^0), \quad \nabla h_j(x^0)^\mathsf{T} y = 0,\ j = 1, \ldots, r\}$$

heisst *Linearisierungskegel* an M in x^0. Man sagt, dass im Punkt x^0 die ***Abadie CQ*** (eigentlich *Abadie's Constraint Qualification* oder *Regularitätsbedingung von Abadie*) erfüllt ist, wenn

$$K(M, x^0) \subset T(M, x^0)$$

gilt. ◇

5.2.9 Übung. Man zeige, dass stets $T(M,x^0) \subset K(M,x^0)$ gilt, so dass die Abadie-CQ auch in der Form $T(M,x^0) = K(M,x^0)$ geschrieben werden könnte. ◇

5.2.10 Satz. (Kuhn-Tucker-Bedingungen).[4] *Sei x^0 ein lokaler Minimalpunkt der Aufgabe (P) und sei im Punkt x^0 die Abadie CQ erfüllt. Dann existieren Vektoren $u \in \mathbb{R}^m$ und $v \in \mathbb{R}^r$, die zusammen mit dem Vektor x^0 den folgenden Bedingungen genügen:*

$$
\begin{array}{rl}
(i) & \nabla f(x^0) + \sum_{i=1}^m u_i \nabla g_i(x^0) + \sum_{j=1}^r v_j \nabla h_j(x^0) = 0, \\
(ii) & u_i \geq 0,\ g_i(x^0) \leq 0,\ u_i g_i(x^0) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m), \\
(iii) & v_j \in \mathbb{R},\ h_j(x^0) = 0 \qquad\qquad (j = 1, \ldots, r).
\end{array}
$$

◇

Bezeichnungen.
Die Bedingungen (i), (ii) und (iii) heissen (lokale) *Kuhn-Tucker-Bedingungen*. Die Zahlen u_I und v_j heissen *Lagrange-Multiplikatoren* zu x^0. Die Bedingung (i) heisst *Lagrange-Gleichung*, die Bedingungen $u_i g_i(x^0) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m)$ in (ii) heissen *Komplementaritätsbedingungen*.

Beweis. Wir fassen die Funktionen g_i, $i \in I = I(x^0)$, zu einer Vektorfunktion g_I zusammen und schreiben den negativen Gradienten der Zielfunktion und die Jacobi-Matrizen (in transponierter Form) kurz als

$$b = -\nabla f(x^0), \quad G^\mathsf{T} = Dg_I(x^0), \quad H^\mathsf{T} = Dh(x^0).$$

Ist I die leere Menge, lassen wir die betreffenden Terme einfach weg. Sei s die Anzahl der Elemente von I. Nach den allgemeinen notwendigen Bedingungen von Satz 5.2.5 gilt wegen der Abadie CQ, d.h., wegen $T(M,x^0) = K(M,x^0)$,

$$G^\mathsf{T} y \leq 0,\ H^\mathsf{T} y = 0 \quad \Rightarrow \quad b^\mathsf{T} y \leq 0.$$

Das kann mit $A = (G, H, -H)$ auch geschrieben werden als

$$A^\mathsf{T} y = \begin{pmatrix} G^\mathsf{T} \\ H^\mathsf{T} \\ -H^\mathsf{T} \end{pmatrix} y \leq 0 \quad \Rightarrow \quad b^\mathsf{T} y \leq 0,$$

d.h., nach dem Lemma von Farkas gilt $\{z | Az = b, z \geq 0\} \neq \emptyset$. Ausgeschrieben bedeutet das

$$W := \{\ z = (u, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^r \mid Gu + H\lambda - H\mu = b,\ u, \lambda, \mu \geq 0\} \neq \emptyset.$$

[4] In der moderneren Literatur auch als *Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen* bezeichnet. Sie gehen auf eine Arbeit von Kuhn und Tucker (1951) zurück, die schon früher geschriebene Arbeit von Karush (1939) wurde erst in den 70er Jahren 'wiederentdeckt'.

Ist also $(u^*, \lambda^*, \mu^*) \in W$, dann ist mit $v^* = \lambda^* - \mu^*$ auch

$$(u^*, v^*) \in \{(u, v) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r \,|\, Gu + Hv = b,\ u \geq 0\}.$$

Übersetzen wir G, H und b wieder zurück, so folgt

$$\nabla f(x^0) + \sum_{i \in I} u_i^* \nabla g_i(x^0) + \sum_{j=1}^{r} v_j^* \nabla h_j(x^0) = 0.$$

Schreiben wir noch $u_i^* = 0$ für $i \notin I$, setzen $u = (u_1^*, \ldots, u_m^*)^\mathsf{T}$ und $v = (v_1^*, \ldots, v_r^*)^\mathsf{T}$ und berücksichtigen $x^0 \in M$, so stehen die Kuhn-Tucker-Bedingungen schon da. Das war zu beweisen. □

5.2.11 Korollar. (Lineare Restriktionen). *Ist (P) ein Optimierungsproblem mit linearen Restriktionen und x^0 ein lokaler Minimalpunkt von (P), so gelten in x^0 die Kuhn-Tucker-Bedingungen (i), (ii) und (iii) aus Satz 5.2.10.* ◇

Beweis. Der Satz sagt also: Unter linearen Restriktionen muss die Abadie CQ in x^0 nicht überprüft werden, damit die Kuhn-Tucker-Bedingungen in einem lokalen Minimalpunkt erfüllt sind. Der Grund: Die Abadie CQ ist unter linearen Restriktionen automatisch erfüllt. Das zeigen wir jetzt.

Schreiben wir die Nebenbedingungen als

$$\begin{aligned} x^\mathsf{T} a^i - b_i &\leq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \\ x^\mathsf{T} a^j - b_j &= 0, \quad j = m+1, \ldots, m+r, \end{aligned}$$

so gilt für $y \in K(M, x^0)$ nach Definition des Linearisierungskegels

$$\begin{aligned} y^\mathsf{T} a^i &\leq 0, \quad i \in I(x^0), \\ y^\mathsf{T} a^j &= 0, \quad j = m+1, \ldots, m+r. \end{aligned}$$

Sei $y \in K(M, x^0)$ beliebig, aber fest. Dann rechnen wir sofort nach

$$(x^0 + ty)^\mathsf{T} a^i = {x^0}^\mathsf{T} a^i + t y^\mathsf{T} a^i = b_i + t y^\mathsf{T} a^i \leq b_i \quad \forall i \in I(x^0)\ \forall t \geq 0$$

sowie mit $J = \{m+1, \ldots, m+r\}$

$$(x^0 + ty)^\mathsf{T} a^j = {x^0}^\mathsf{T} a^j + t y^\mathsf{T} a^j = b_j + t y^\mathsf{T} a^j = b_j \quad \forall j \in J\ \forall t \geq 0.$$

Für $l \in \{1, \ldots, m\} \setminus I(x^0)$ gilt andererseits wegen ${x^0}^\mathsf{T} a^l - b_l < 0$ mit kleinem $t_0 > 0$, dass

$$(x^0 + ty)^\mathsf{T} a^l - b_l = {x^0}^\mathsf{T} a^l - b_l + t y^\mathsf{T} a^l < 0 \quad \forall t \in (0, t_0).$$

Folglich ist mit Folgen $\{x^k\}$ und $\{t_k\}$ der Form

$$x^k = x^0 + t_k y, \qquad t_k = 1/k\,,$$

für genügend grosse k die Definition (5.8) von $y \in T(M, x^0)$ erfüllt. Wir haben also $K(M, x^0) \subset T(M, x^0)$ erhalten, was zu zeigen war. □

5.2.12 Definition. Sei x^0 ein zulässiger Punkt von (P), d.h. $x^0 \in M$, und sei wieder $I(x^0) = \{i \,|\, g_i(x^0) = 0\}$ die Indexmenge der in x^0 aktiven Restriktionen.

Man sagt, die ***Lineare Unabhängigkeitsbedingung*** (kurz ***LICQ*** von "Linear Independence Constraint Qualification") ist in x^0 erfüllt, falls gilt:

$$\{\nabla g_i(x^0),\ i \in I(x^0),\ \nabla h_j(x^0),\ j = 1, \dots, r\} \text{ ist linear unabhängig.}$$

Man sagt, die ***Mangasarian-Fromovitz-Bedingung*** (kurz ***MFCQ*** von "Mangasarian-Fromovitz Constraint Qualification") ist in x^0 erfüllt, falls gilt:

(i) $\{\nabla h_j(x^0),\ j = 1, \dots, r\}$ ist linear unabhängig, und

(ii) es existiert ein $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$, so dass

$$\begin{aligned} \bar{y}^T \nabla g_i(x^0) &< 0, \quad i \in I(x^0), \\ \bar{y}^T \nabla h_j(x^0) &= 0, \quad j = 1, \dots, r. \end{aligned}$$

Beide Namen sind auch üblich, wenn in (P) keine Gleichungsrestriktionen auftreten.[5] Enthält (P) keine Ungleichungsrestriktionen, fallen offenbar die Bedingungen LICQ und MFCQ zusammen und sind gerade die Regularitätsvoraussetzung für die Lagrange-Bedingungen. $\diamond$

5.2.13 Lemma. *Sei $x^0 \in M$. Dann gilt in diesem Punkt*

$$\text{LICQ} \quad \Rightarrow \quad \text{MFCQ} \quad \Rightarrow \quad \text{Abadie-CQ}.$$

$\diamond$

Beweis. Sei zunächst LICQ in x^0 erfüllt. Dann gilt speziell (i) in der Definition von MFCQ, und das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y^T \nabla g_i(x^0) &= -1, \quad i \in I(x^0), \\ y^T \nabla h_j(x^0) &= 0, \quad j = 1, \dots, r. \end{aligned}$$

hat stets eine Lösung $y = \bar{y}$ wegen der linearen Unabhängigkeit der Zeilen der Koeffizientenmatrix. Damit gilt MFCQ in x^0.

Sei nun MFCQ in x^0 erfüllt, und es sei $\bar{y}$ ein Vektor, der der Bedingung (ii) in Definition 5.2.12 von MFCQ genügt. Ferner sei $y \in K(M, x^0)$ beliebig, aber fest, d.h., es gilt

$$\nabla g_i(x^0)^\mathsf{T} y \leq 0,\ i \in I(x^0), \quad \nabla h_j(x^0)^\mathsf{T} y = 0,\ j = 1, \dots, r.$$

Zunächst einmal wählen wir $\alpha > 0$ beliebig, aber fest. Es genügt zu zeigen, dass die Richtung $y + \alpha\bar{y}$ zu $T(M, x^0)$ gehört. Da $T(M, x^0)$ abgeschlossen ist, liefert der Grenzübergang $\alpha \downarrow 0$ dann auch $y \in T(M, x^0)$.

[5] MFCQ heisst dann aber auch *Cottle-CQ*

Mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen kann man zeigen (wir machen das am Ende des Beweises):

$$\begin{aligned}&\text{Es existieren ein } s > 0 \text{ und eine stetig differenzierbare}\\ &\text{Funktion } \ x(\cdot) : (-s, s) \to \mathbb{R}^n, \text{ so dass } \ x(0) = x^0,\\ &Dx(0) = y + \alpha\bar{y} \quad \text{und} \quad h(x(t)) = 0 \ \ \forall t \in (-s, s).\end{aligned} \tag{5.11}$$

Sei nun $i \in I(x^0)$. Wegen $y \in K(M, x^0)$ und nach Wahl von $\bar{y}$ ist dann

$$y^\mathsf{T}\nabla g_i(x^0) \leq 0, \quad \text{folglich} \ \ (y + \alpha\bar{y})^\mathsf{T}\nabla g_i(x^0) < 0.$$

Das ergibt nach der Kettenregel mit $x(\cdot)$ aus (5.11)

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{g_i(x(t)) - g_i(x^0)}{t} = \nabla g_i(x^0)^\mathsf{T} Dx(0) = \nabla g_i(x^0)^\mathsf{T}(y + \alpha\bar{y}) < 0.$$

Folglich existiert ein $t_0 > 0$, so dass

$$g_i(x(t)) = g_i(x(t)) - g_i(x^0) < 0 \quad \forall t \in (0, t_0),$$

dabei wurde $g_i(x^0) = 0$ (wegen $i \in I(x^0)$) benutzt. Sei t_0 so klein, dass diese Ungleichung für alle $i \in I(x^0)$ gilt. Also haben wir jetzt

$$g_i(x(t)) \leq 0 \quad \forall t \in (0, t_0) \ \forall i \in I(x^0). \tag{5.12}$$

Da $g_j(x^0) < 0$ für $j \in \{1, \ldots, m\} \setminus I(x^0)$ gilt und g_j sowie $x(\cdot)$ stetig sind, ist auch $g_j(x(t)) < 0$ für hinreichend kleine positive t (die speziell auch $t < t_0$ erfüllen mögen). Damit gilt unter Bechtung von (5.11) und (5.12) für

$$x^k = x(t_k) \quad \text{und} \quad t_k = 1/k$$

und genügend grosses k, dass

$$x^k \in M.$$

Weiter gilt $x^k \to x^0$ sowie

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x^k - x^0}{t_k} = y + \alpha\bar{y},$$

d.h., $y + \alpha\bar{y} \in T(M, x^0)$, was zu zeigen war.

Es stand noch aus, die Aussage (5.11) zu beweisen. Sei

$$d := y + \alpha\bar{y}.$$

Da sowohl $Dh(x^0)y = 0$ als auch $Dh(x^0)\bar{y} = 0$ gilt, folgt

$$Dh(x^0)d = 0.$$

Nun definieren wir

$$F(z,t) = h(x^0 + td + Dh(x^0)^\mathsf{T} z),\ z \in \mathbb{R}^r,\ t \in \mathbb{R}\,.$$

Offenbar ist $F(0_r, 0) = h(x^0) = 0$, wobei 0_r den Nullvektor in $\mathbb{R}^r$ bezeichnet. F ist stetig differenzierbar als Zusammensetzung einer affin-linearen und einer stetig differenzierbaren Funktion. Wir rechnen nach Kettenregel aus, dass

$$J_z := D_z F(0_r, 0) = Dh(x^0) Dh(x^0)^\mathsf{T}$$

gilt. Da die Zeilen von $Dh(x^0)$ nach Bedingung (i) in der Definition von MFCQ linear unabhängig sind, ist J_z eine invertierbare Matrix.[6] Nach dem Korollar 4.4.6 des Satzes über implizite Funktionen gibt es dann ein $s > 0$ und eine stetig differenzierbare Funktion

$$t \in (-s, s) \mapsto z(t)$$

mit

$$z(0) = 0_r \quad \text{und} \quad F(z(t), t) = 0 \ \ \forall t \in (-s, s).$$

Differentiation an der Stelle $t = 0$ liefert dann für $\varphi(t) := F(z(t), t)$ nach Kettenregel

$$0_r = \frac{d\varphi(0)}{dt} = D_z F(0_r, 0) Dz(0) + D_t F(0_r, 0) = J_z Dz(0) + Dh(x^0) d.$$

Da $Dh(x^0)d = 0$ gilt und J_z invertierbar ist, folgt

$$Dz(0) = 0_r.$$

Wir definieren nun die (offenbar stetig differenzierbare) Funktion

$$x(t) := x^0 + td + Dh(x^0) z(t),\ t \in (-s, s).$$

Es gilt

$$x(0) = x^0,\ Dx(0) = d = y + \alpha\bar{y} \quad \text{und} \quad h(x(t)) = 0\ \forall t \in (-s, s),$$

was für Eigenschaft (5.11) zu zeigen war. □

5.2.14 Korollar. *Ist x^0 ein lokaler Minimalpunkt von (P), der LICQ oder MFCQ genügt, so gelten in x^0 die Kuhn-Tucker-Bedingungen (i), (ii) und (iii) aus Satz 5.2.10.* ◇

Beweis. Das ist eine unmittelbare Folgerung aus Satz 5.2.10 und Lemma 5.2.13. □

---

[6] Dass J_z invertierbar ist, sieht man wie folgt. Sei $A = Dh(x^0)$. Dann ist $J_z = AA^\mathsf{T}$ eine (r, r)-Matrix. Sie ist regulär (d.h. invertierbar): Wenn nämlich $AA^\mathsf{T} z = 0$ gilt, so ist auch $(A^\mathsf{T} z)^\mathsf{T}(A^\mathsf{T} z) = z^\mathsf{T} AA^\mathsf{T} z = 0$, folglich gilt nach den Eigenschaften des euklidischen Skalarprodukts auch $A^\mathsf{T} z = 0$. Da die Spalten von A^T linear unabhängig sind, folgt $z = 0$. Also ist AA^T regulär.

5.2.15 Sei x^0 ein lokaler Minimalpunkt von (P), der LICQ oder MFCQ genügt. Wir betrachten die Menge aller Lagrange-Multiplikator-Vektoren zu x^0

$$\Lambda(x^0) := \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r \;\middle|\; \begin{array}{l} \nabla f(x^0) + \sum_{i=1}^m u_i \nabla g_i(x^0) + \sum_{j=1}^r v_j \nabla h_j(x^0) = 0, \\ u_i \geq 0,\ u_i g_i(x^0) = 0 \quad (i = 1, \dots, m). \end{array} \right\}.$$

Dann gilt mit $I = I(x^0)$ und $\overline{I} = \{1, \dots, m\} \setminus I(x^0)$

$$\begin{aligned} & (u,v) \in \Lambda(x^0) \\ \Leftrightarrow\ & \nabla f(x^0) + \sum_{i \in I} u_i \nabla g_i(x^0) + \sum_{j=1}^r v_j \nabla h_j(x^0) = 0,\ u_i \geq 0, i \in I,\ u_j = 0, j \in \overline{I}. \end{aligned}$$

Gilt in x^0 LICQ, so hat die in dieser Form aufgeschriebene Lagrange-Gleichung (dabei wird x^0 als gegeben aufgefasst) wegen der linearen Unabhängigkeit aller Vektoren $\nabla g_i(x^0)$, $\nabla h_j(x^0)$ eine eindeutige Lösung (u, v), d.h., der Lagrange-Multiplikator-Vektor zu x^0 ist eindeutig bestimmt.

Gilt in x^0 MFCQ, so ist die Menge aller Lagrange-Multiplikator-Vektoren zu x^0 beschränkt, wie man mit einiger Mühe beweisen kann. Der Beweis benutzt das Farkas-Lemma und beruht auf Eigenschaften konvexer polyedrischer Mengen, die über den Stoff dieser Vorlesung hinausgehen. $\diamond$

5.2.16 Übung. Man betrachte die Aufgabe

$$\text{(NLP 1)} \quad \min\{\tfrac{1}{2}x^4 - xy + y^2 \mid x \geq 1,\ y \geq 1 + x\}.$$

(a) Stellen Sie die lokalen Kuhn-Tucker-Bedingungen dazu auf.

(b) Stellen Sie fest, ob $(1, 2)$ stationärer Punkt von (NLP 1) ist.

(c) Stellen Sie fest, ob $(2, 16)$ stationärer Punkt von (NLP 1) ist.

$\diamond$

5.2.17 Übung. Gegeben sei das nichtlineare Programm

$$\text{(NLP 2)} \qquad \min\{-\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}y^2 \mid x^2 - y \leq 1,\ y \leq 1\}.$$

(a) Stellen Sie die lokalen Kuhn-Tucker-Bedingungen dazu auf.

(b) Was sagen die lokalen Kuhn-Tucker-Bedingungen im Hinblick auf lokale Minima von (NLP 2) aus?

(c) Berechnen Sie alle stationären Punkte von (NLP 2).

$\diamond$

5.3 Konvexe Optimierungsprobleme

5.3.1 Konvexe Mengen und Funktionen. Beide Begriffe wurden in Kapitel 4 wiederholt. Man überlegt sich leicht folgende Eigenschaften:

(i) Sind $X_i \subset \mathbb{R}^n$, $i \in I$ (I beliebige Indexmenge) konvexe Mengen, so ist auch $\bigcap_{i\in I} X_i$ eine konvexe Menge (ggf. leer).

(ii) Sind f und g konvexe Funktionen auf einer konvexen Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ und μ eine positive reelle Zahl, so sind auch die Funktionen $f+g$ und μf konvex.

(iii) Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge, so ist zu jedem $\nu \in \mathbb{R}$ die *untere Niveaumenge* $\{x \in X \mid \varphi(x) \leq \nu\}$ einer konvexen Funktion $\varphi : X \to \mathbb{R}$ eine konvexe Menge (ggf. leer).

Per definitionem ist die leere Menge konvex, sie ist ausserdem abgeschlossen, also lassen wir zukünftig die Zusatzbemerkung "ggf. leer" weg. ◇

5.3.2 Satz. *Sei $\varphi : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion und X eine nichtleere konvexe Menge. Dann gilt:*

1. *Ist x^0 ein lokaler Minimalpunkt der Aufgabe $\min\{\varphi(x) \mid x \in X\}$, so ist x^0 auch ein globaler Minimalpunkt dieser Aufgabe.*

2. *Die Menge aller globalen Optimalpunkte der Aufgabe $\min\{\varphi(x) \mid x \in X\}$ ist konvex.*

Beweis. Aussage 2. folgt aus (i) und (iii) in Bemerkung 5.3.1, wenn man beachtet, dass die Menge X^* der globalen Optimalpunkte der Aufgabe $\min\{\varphi(x) \mid x \in X\}$ durch

$$X^* = \{z \in X \mid \varphi(z) \leq \varphi(x)\, \forall x \in X\} = \bigcap_{x\in X} \{z \in X \mid \varphi(z) \leq \varphi(x)\},$$

d.h., als Durchschnitt konvexer (unterer Niveau-)Mengen, dargestellt werden kann.

Um Aussage 1. zu beweisen, sei x^0 ein lokaler Minimalpunkt von $\min\{\varphi(x) \mid x \in X\}$, d.h., es existiert ein $\varepsilon > 0$ so dass

$$\varphi(x^0) \leq \varphi(x)\ \forall x \in X \cap B^\circ(x^0, \varepsilon) \tag{5.13}$$

gilt. Angenommen, es existiert ein $x^1 \in X$, so dass

$$\varphi(x^1) < \varphi(x^0). \tag{5.14}$$

Dann liegt jeder Punkt $x(t) = tx^1 + (1-t)x^0$ mit $0 \leq t \leq 1$ (das sind die Punkte auf der Verbindungsstrecke zwischen x^0 und x^1) wegen der Konvexität von X in X, und es gilt nach Definition konvexer Funktionen

$$\varphi(x(t)) \leq t\varphi(x^1) + (1-t)\varphi(x^0) \quad \forall t \in [0,1].$$

Wegen (5.14) folgt daraus für alle $t \in (0,1]$

$$\varphi(x(t)) \;\le\; t\varphi(x^1) + (1-t)\varphi(x^0) \;<\; t\varphi(x^0) + (1-t)\varphi(x^0) \;=\; \varphi(x^0),$$

insbesondere gilt also

$$\varphi(x(t)) < \varphi(x^0)$$

auch für solche kleinen $t > 0$, für die $x(t)$ in der Umgebung $B^\circ(x^0,\varepsilon)$ und damit im Durchschnitt $X \cap B^\circ(x^0,\varepsilon)$ liegt – im Widerspruch zu (5.13). Damit war die Annahme (5.14) falsch, und unsere Behauptung ist bewiesen. □

5.3.3 Konvexe Optimierungprobleme mit differenzierbaren Funktionen. Wir betrachten wieder die Standardaufgabe (P), aber nun unter zusätzlichen Konvexitätsvoraussetzungen:

$$(\mathrm{P})\qquad \begin{array}{ll} \text{Minimiere } f(x) & \\ \text{bezüglich} & g_i(x) \le 0,\ i = 1,\dots,m\,,\ h_j(x) = 0,\ j = 1,\dots,r\,, \end{array} \tag{5.15}$$

wobei die Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ als stetig differenzierbar und konvex, die Funktionen $h_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ als affin-linear vorausgesetzt sind ($i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,r$).

Unter diesen Voraussetzungen heisst (P) – wie oben eingeführt – *konvexes Programm* oder *konvexes Optimierungsproblem.*

Wir fassen wieder die Funktionen g_i und h_j zu Vektorfunktionen g und h zusammen und bezeichnen mit

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \le 0,\ h(x) = 0\}$$

den zulässigen Bereich von (P).

Auf der Grundlage des folgenden Satzes und von Aussage 1. in Satz 5.3.2 ist klar, dass die ***Menge der Lösungen der Aufgabe (5.15)*** stets als Menge der globalen Optimallösungen dieser Aufgabe zu verstehen ist. ◇

5.3.4 Satz. *Der zulässige Bereich M der konvexen Optimierungsaufgabe (5.15) ist eine konvexe und abgeschlossene Menge.* ◇

Beweis. Die Funktionen g_i sind nach Voraussetzung differenzierbar, also insbesondere stetig. Die Funktionen g_i sind zudem konvex. Folglich sind die Mengen $G_i = \{x | g_i(x) \le 0\}$ abgeschlossen und konvex. Die Mengen $H_j = \{x | h_j(x) = 0\}$ sind Hyperebenen (im Falle $h_j \equiv 0$ der ganze $\mathbb{R}^n$), also auch abgeschlossene, konvexe Mengen. Der zulässige Bereich M ist als Durchschnitt der Mengen G_i, H_j ($\forall i, j$) dann auch abgeschlossen und konvex. □

5.3.5 Übung. Zeigen Sie mit analogen Argumenten wie im Beweis des vorigen Satzes die folgende Aussage:

Die Menge der Lösungen der konvexen Optimierungsaufgabe (5.15) ist eine konvexe und abgeschlossene Menge. ◇

5.3.6 Satz. (Kuhn-Tucker-Bedingungen als hinreichendes Optimalitätskriterium). *Wir betrachten das konvexe Programm (5.15). Erfüllt ein Tripel von Vektoren* (x^0, u, v) *die Kuhn-Tucker-Bedingungen*

$$\begin{aligned} &(i) \quad \nabla f(x^0) + \textstyle\sum_{i=1}^m u_i \nabla g_i(x^0) + \sum_{j=1}^r v_j \nabla h_j(x^0) = 0, \\ &(ii) \quad u_i \geq 0,\ g_i(x^0) \leq 0,\ u_i g_i(x^0) = 0 \quad (i = 1, \dots, m), \\ &(iii) \quad v_j \in \mathbb{R},\ h_j(x^0) = 0 \qquad\quad (j = 1, \dots, r), \end{aligned} \tag{5.16}$$

so ist x^0 *Lösung der Aufgabe (5.15).* ◇

Beweis. Sind die Bedingungen (5.16) erfüllt, so gilt mit $I = I(x^0)$ auch

$$\nabla f(x^0) + \sum_{i \in I} u_i \nabla g_i(x^0) + \sum_{j=1}^r v_j \nabla h_j(x^0) = 0,\ u_i \geq 0, i \in I. \tag{5.17}$$

Da das Lemma von Farkas eine "genau dann, wenn"-Aussage ist, können wir die Argumente des Beweises des Kuhn-Tucker Theorems (Satz 5.2.10) alle rückwärts anwenden, und wir erhalten so aus (5.17), dass

$$y \in K(M, x^0) \quad \Rightarrow \quad \nabla f(x^0)^\mathsf{T} y \geq 0$$

gilt (das geht bis zu dieser Stelle, ohne die Abadie-CQ anzuwenden!!). Da aber stets, vgl. die Übung 5.2.9,

$$T(M, x^0) \subset K(M, x^0)$$

erfüllt ist, folgt daraus

$$\nabla f(x^0)^\mathsf{T} y \geq 0 \quad \forall y \in T(M, x^0).$$

Sei nun $x \in M$ beliebig. Dann gilt aber

$$x - x^0 \in T(M, x^0),$$

denn $x^k = x^0 + t_k(x - x^0)$ mit $t_k = 1/k$ (speziell also $t_k \in (0, 1]\ \forall k$) erfüllen die Eigenschaften der Folgen $\{x^k\}$ und $\{t_k\}$ in der Definition des Tangentialkegels. Wegen der Konvexität von f gilt dann aber

$$\forall x \in M: \quad f(x) - f(x^0) \geq (x - x^0)^\mathsf{T} \nabla f(x^0) \geq 0,$$

also löst x^0 die Aufgabe (5.15). □

5.3.7 Korollar. (Konvexe Programme unter linearen Restriktionen). *In dem konvexen Programm (5.15) seien alle Nebenbedingungen linear. Dann ist* x^0 ***genau dann*** *eine Lösung der Aufgabe (5.15),* ***wenn*** *Vektoren* $u \in \mathbb{R}^m$ *und* $v \in \mathbb{R}^r$ *existieren, die gemeinsam mit* x^0 *den Kuhn-Tucker-Bedingungen (5.16) genügen.* ◇

Beweis. Folgt sofort aus Satz 5.3.6 sowie aus Korollar 5.2.11 und der Tatsache, dass jeder globale Minimalpunkt auch lokaler Minimalpunkt ist.

5.3.8 Lineare Programme. Wir spezialisieren nun die Kuhn-Tucker-Bedingungen auf das lineare Programm

$$\text{(LP-P)} \qquad \min\{c^{\mathsf{T}} x \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$$

mit gegebenen Vektoren $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^r$ und gegebener (r, n)-Matrix A.

Bekanntlich gilt für die lineare Funktion

$$h(x) = Ax - b, \quad \text{dass } Dh(x) = A,$$

für $g(x) = -x$ gilt $Dg(x) = -I$. Die (transponierten) Gradienten der Komponentenfunktionen h_i fallen gerade mit den Zeilenvektoren von $Dh(x) = A$ zusammen, in der üblichen Schreibweise als Spaltenvektoren sind also die Gradienten der Komponentenfunktionen h_i gerade die Spalten der Matrix A^{T}.

Somit lauten die Kuhn-Tucker-Bedingungen mit gewissen Multiplikator-Vektoren $w \in \mathbb{R}^m$ und $v \in \mathbb{R}^r$ in Matrix-Vektor-Schreibweise

$$\begin{aligned} &c - Iw + A^{\mathsf{T}} v = 0, \\ &Ax = b, \\ &x \geq 0, w \geq 0,\ x^{\mathsf{T}} w = 0. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Nutzen wir die Äquivalenz (man setze $w = c + A^{\mathsf{T}} v$)

$$c - Iw + A^{\mathsf{T}} v = 0,\ w \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad c + A^{\mathsf{T}} v \geq 0$$

und substituieren wir $u := -v$, so ergeben sich die zu (5.18) äquivalenten Bedingungen

$$\begin{aligned} &c - A^{\mathsf{T}} u \geq 0, \\ &Ax - b = 0, \\ &x \geq 0,\ x^{\mathsf{T}}(c - A^{\mathsf{T}} u) = 0. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Das sind aber die Kuhn-Tucker-Bedingungen zur Aufgabe

$$\min\{-b^{\mathsf{T}} u \mid A^{\mathsf{T}} u \leq c\}$$

(nun ist x der Multiplikator-Vektor), die wiederum zum linearen Programm

$$\text{(LP-D)} \qquad \max\{b^{\mathsf{T}} u \mid A^{\mathsf{T}} u \leq c\}$$

äquivalent ist. (LP-D) heisst das zum *primalen* Programm (LP-P) *duale Programm.*

Sind x^0 Lösung von (LP-P) und u^0 Lösung von (LP-D), dann folgt aus (5.19), dass

$$b^\mathsf{T} u^0 - c^\mathsf{T} x^0 = (Ax^0)^\mathsf{T} u^0 - c^T x^0 = (x^0)^\mathsf{T}(c - A^\mathsf{T} u) = 0,$$

d.h., die Optimalwerte von (LP-P) und (LP-D) sind gleich. Es folgen nun aus Satz 5.3.7 und Bedingung (5.19) die ersten beiden

Dualitätssätze der linearen Optimierung. Es gilt

1. (LP-P) ist lösbar genau dann, wenn (LP-D) lösbar ist. Dabei sind die Optimalwerte beider Aufgaben gleich.
2. Ist x zulässig für (LP-P) und u zulässig für (LP-D), dann gilt stets $b^\mathsf{T} u \leq c^\mathsf{T} x$.
3. (LP-P) (und damit auch (LP-D)) ist genau dann lösbar, wenn sowohl die primal zulässige Menge $\{x \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$ als auch die dual zulässige Menge $\{u \mid A^\mathsf{T} u \leq c\}$ nicht leer sind.

Der Beweis des dritten Satzes erfolgt mit Hilfe der Aussage 2. und des folgenden wichtigen Hilfssatzes: Wenn die Zielfunktion von (LP-P) nach unten beschränkt ist, so wird das Minimum auch angenommen. Der Beweis übersteigt das Anliegen dieser Analysis-Vorlesung, wir verweisen auf die einschlägige OR-Literatur. ◇

5.3.9 Definition. Man sagt, dass die Aufgabe (5.15) der ***Slater-Bedingung*** genügt, wenn ein zulässiger Punkt $\widetilde{x}$ existiert, so dass

$$g_i(\widetilde{x}) < 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\},$$

d.h., $\widetilde{x}$ muss den (nach Voraussetzung: linearen) Gleichungsrestriktionen genügen und alle Ungleichungsrestriktionen *strikt* erfüllen. Man nennt $\widetilde{x}$ oft auch *Slater-Punkt.* ◇

5.3.10 Lemma. *Wenn die Aufgabe (5.15) der **Slater-Bedingung** genügt, so ist in jedem zulässigen Punkt von (5.15) die Abadie-CQ erfüllt.* ◇

Beweis. Sei $x^0 \in M$ beliebig. Die linearen Nebenbedingungen seien mit einer (r, n)-Matrix A und einer rechten Seite $b \in \mathbb{R}^r$ geschrieben, d.h.,

$$h(x) := Ax - b = 0.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien die Zeilen von A linear unabhängig, andernfalls lasse die überflüssigen Gleichungen weg. (Anmerkung: Das Weglassen dieser Gleichungen ändert weder etwas am Tangentialkegel $T(M, x^0)$ noch am Linearisierungskegel $K(M, x^0)$.)

Sei nun $\widetilde{x}$ ein Slaterpunkt. Definiere

$$\bar{y} := \widetilde{x} - x^0.$$

Dann gilt

$$Dh(x^0)\bar{y} = A\bar{y} = A\widetilde{x} - Ax^0 = b - b = 0$$

sowie wegen der Konvexität der g_i und $g_i(\widetilde{x}) < 0$

$$0 > g_i(\widetilde{x}) \geq g_i(x^0) + (\widetilde{x} - x^0)^\mathsf{T} \nabla g_i(x^0) = \bar{y}^\mathsf{T} \nabla g_i(x^0) \quad \forall i \in I(x^0),$$

wobei $g_i(x^0) = 0$ für $i \in I(x^0)$ (d.h., i aktiv) benutzt wurde. Damit ist MFCQ in x^0 erfüllt und nach Lemma 5.2.13 auch die Abadie-CQ. □

5.3.11 Satz. (Kuhn-Tucker-Bedingungen als notwendiges Optimalitätskriterium). *Sei x^0 eine Lösung des konvexen Programms (5.15), für das die Slater-Bedingung erfüllt sei. Dann gibt es Vektoren u und v, die zusammen mit x^0 den Kuhn-Tucker-Bedingungen (5.16) genügen.* ◇

Beweis. Folgt sofort aus Satz 5.2.10 und Lemma 5.3.10. □

5.3.12 Korollar. (Konvexe Programme unter Slater-Bedingung). *In dem konvexen Programm (5.15) sei die Slater Bedingung erfüllt. Dann ist x^0 **genau dann** eine Lösung der Aufgabe (5.15), **wenn** Vektoren $u \in \mathbb{R}^m$ und $v \in \mathbb{R}^r$ existieren, die gemeinsam mit x^0 den Kuhn-Tucker-Bedingungen (5.16) genügen.* ◇

Beweis. Folgt sofort aus Satz 5.3.6 und Satz 5.3.11. □

5.3.13 Übung. Lösen Sie mit Hilfe der Kuhn–Tucker–Bedingungen die Optimierungsaufgabe in den Variablen x_1, ..., x_n, x_{n+1},

$$\min \ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 \quad \text{bezüglich} \quad x_{n+1} \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i \,.$$

Begründen Sie, warum es sich um eine Optimallösung handelt. ◇

5.3.14 Übung. Gegeben sei das nichtlineare Programm

$$\min\{4x^2 + 2y^2 + 4xy - 9x - 6y \,|\, x + y - 1 \leq 0,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}.$$

Überprüfen Sie, ob $(\bar{x}, \bar{y}) = (\,0.75\,,\,0.25\,)$ den lokalen Kuhn-Tucker-Bedingungen genügt. Was schliessen Sie daraus? ◇

5.3.15 Kuhn-Tucker-Bedingungen mittels Lagrangefunktion. Wir betrachten hier das *konvexe* Programm (P). Sei wie üblich die *Lagrangefunktion*

$$L(x, u, v) := f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{r} v_j h_j(x),\ \ (x, u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r.$$

Sei (x^0, u^0, v^0) ein Punkt, der den Kuhn-Tucker-Bedingungen (5.16) genügt. Dieser Punkt erfüllt dann offenbar

$$\begin{aligned}&(i)\ \ \nabla_x L(x^0, u^0, v^0) = 0, \quad (ii)\ \ \nabla_v L(x^0, u^0, v^0) = 0,\\ &(iii)\ \ \nabla_u L(x^0, u^0, v^0) \leq 0,\ u^0 \geq 0,\ {u^0}^\mathsf{T} \nabla_u L(x^0, u^0, v^0) = 0.\end{aligned}$$

Da die Funktion

$$x \mapsto \varphi(x) := L(x, u^0, v^0)$$

nach den Voraussetzungen für ein konvexes Programm eine konvexe und stetig differenzierbare Funktion ist, gilt (i) genau dann, wenn x^0 Lösung der Aufgabe

$$\min_x \{\varphi(x) \,|\, x \in \mathbb{R}^n\}$$

ist. Die Funktion

$$(u, v) \in \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^r \mapsto \psi(u, v) := L(x^0, u, v)$$

ist sogar affin-linear, dabei bezeichnet $\mathbb{R}^m_+$ den nichtnegativen Orthanten des $\mathbb{R}^m$. Somit ist die Aufgabe

$$\text{(LIN)} \qquad \max_{(u,v)} \{\psi(u, v) \,|\, (u, v) \in \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^r\}$$

ein spezielles lineares (und damit konvexes) Programm. Man überlegt sich ohne Mühe, dass (u^0, v^0) genau dann Lösung von (LIN) ist, wenn die Bedingungen (ii) und (iii) erfüllt sind (sie sind äquivalent zu den Kuhn-Tucker-Bedingungen für (LIN)). Damit gilt der

Sattelpunktssatz. (x^0, u^0, v^0) ist genau dann Kuhn-Tucker-Punkt des konvexen Programms (P), wenn (x^0, u^0, v^0) *Sattelpunkt* der Lagrange-Funktion ist, d.h., wenn gilt

$$L(x^0, u, v) \le L(x^0, u^0, v^0) \le L(x, u^0, v^0) \qquad \forall (x, u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^r.$$

$\diamond$

Daraus folgt nach Korollar 5.3.12 unter der Slaterbedingung, dass x^0 genau dann Lösung der Aufgabe (P) ist, wenn es einen Punkt $(u^0, v^0) \in \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^r$ gibt, so dass (x^0, u^0, v^0) Sattelpunkt der Lagrangefunktion ist. Letztere Äquivalenz gilt sogar ohne Differenzierbarkeitsvoraussetzungen an f und g, vgl. z.B. *P. Kall, Mathematische Methoden des Operations Research, Teubner 1976*, Satz 2.21. $\diamond$

5.4 Hinreichende Bedingungen zweiter Ordnung

Wir betrachten nun die Standardaufgabe

$$\text{(P)} \qquad \begin{array}{ll} \text{Minimiere } f(x) & \\ \text{bezüglich} & g_i(x) \le 0,\ i = 1, \ldots, m\,,\ h_j(x) = 0,\ j = 1, \ldots, r\,, \end{array}$$

und setzen voraus, dass die Funktionen $f, g_i, h_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(\forall i\ \forall j)$ zweimal stetig differenzierbar sind. Wir fassen wieder g_1, .., g_m zu einer Vektorfunktion g und h_1, .., h_r zu einer Vektorfunktion h zusammen. Der zulässige Bereich von (P) sei wieder mit M bezeichnet. Das Symbol

$$L(x, u, v) = f(x) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(x) + \sum_{j=1}^r v_j h_j(x)$$

bedeutet wieder die Lagrangefunktion der Aufgabe (P).

5.4.1 Vorüberlegung. Wir gehen von einem Kuhn-Tucker-Punkt (x^0, u, v) der Aufgabe (P) aus. Dann gilt – wie wir uns schon mehrfach überlegt haben –

$$\nabla f(x^0)^\mathsf{T} y \geq 0 \quad \forall y \in K(x^0, M),$$

wobei $K(x^0, M)$ wieder der Linearisierungskegel an M in x^0 $(\in M)$ ist. Wenn nun $\bar{y}$ speziell eine Richtung aus $K(x^0, M)$ mit $\nabla f(x^0)^\mathsf{T}\bar{y} > 0$ ist, dann gilt auch für $t > 0$ klein, dass

$$\frac{f(x^0 + t\bar{y}) - f(x^0)}{t} = \bar{y}^\mathsf{T}\nabla f(x^0) + \frac{o(t)}{t} > 0,$$

also ist x^0 bezüglich der Geraden $G = \{x^0 + t\bar{y} \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ lokaler Minimalpunkt. Hingegen kann man für Richtungen $y \in K(x^0, M)$ mit $\nabla f(x^0)^\mathsf{T} y = 0$ zunächst nichts aussagen und muss hoffen, dass Informationen über zweite Ableitungen helfen, um die Optimalität von x^0 zu überprüfen. Welche Informationen könnten das sein?

Betrachten wir zum Kuhn-Tucker-Punkt (x^0, u, v) zulässige Punkte $x^0 + y$ der Aufgabe (P). Dann gilt wegen $u \geq 0$, $g(x^0 + y) \leq 0$, $h(x^0 + y) = 0$ und $\nabla_x L(x^0, u, v) = 0$ sowie $L(x^0, u, v) = f(x^0)$ (Komplementaritätsbedingung!)

$$\begin{aligned} f(x^0 + y) &\geq f(x^0 + y) + u^\mathsf{T} g(x^0 + y) + v^\mathsf{T} h(x^0 + y) \\ &= L(x^0 + y, u, v) \\ &= L(x^0, u, v) + y^\mathsf{T}\nabla_x L(x^0, u, v) + \tfrac{1}{2} y^\mathsf{T}\nabla^2_{xx} L(\tilde{x}, u, v) y \\ &= f(x^0) + \tfrac{1}{2} y^\mathsf{T}\nabla^2_{xx} L(\tilde{x}, u, v) y \end{aligned}$$

mit einer Zwischenstelle $\tilde{x}$ zwischen x^0 und $x^0 + y$. Die letzte Summe wird $> f(x^0)$, wenn der quadratische Term > 0 wird. In diesem Falle ist der Funktionswert in x^0 streng kleiner als in $x^0 + y$. In den hinreichenden Bedingungen werden dann die Richtungen y in $K(x^0, M)$ mit $\nabla f(x^0)^\mathsf{T} y = 0$ gewählt. $\diamond$

5.4.2 Definition. Sei $x^0 \in M$ und $K(x^0, M)$ der Linearisierungskegel an M in x^0, also

$$K(x^0, M) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \nabla h_j(x^0)^\mathsf{T} y = 0,\ j = 1, \ldots, r, \quad \nabla g_i(x^0)^\mathsf{T} y \leq 0,\ i \in I(x^0)\}.$$

Die Menge

$$C(x^0, f, M) := \{y \in K(x^0, M) \mid \nabla f(x^0)^\mathsf{T} y = 0\}$$

heisst *kritischer Kegel* der Aufgabe (P) im Punkt x^0. $\diamond$

5.4.3 Lemma. *Sei (x^0, u, v) ein gegebener Punkt, der den Kuhn-Tucker-Bedingungen der Aufgabe (P) genügt. Dann gilt*

$$C(x^0, f, M) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{ll} \nabla h_j(x^0)^\mathsf{T} y = 0, & j = 1, \ldots, r, \\ \nabla g_i(x^0)^\mathsf{T} y = 0, & \text{falls } i \in I(x^0) \text{ mit } u_i > 0, \\ \nabla g_k(x^0)^\mathsf{T} y \leq 0, & \text{falls } k \in I(x^0) \text{ mit } u_i = 0. \end{array} \right\}, \tag{5.20}$$

wobei $I(x^0)$ wieder die Indexmenge der in x^0 aktiven Ungleichungen ist. $\diamond$

Beweis. Sei mit $Z(x^0, u)$ die Menge in der rechten Seite von (5.20) bezeichnet. Da (x^0, u, v) Kuhn-Tucker-Punkt von (P) ist, lautet die Lagrange-Gleichung

$$-\nabla f(x^0) = \sum_{i\in I(x^0)} u_i \nabla g_i(x^0) + \sum_{j=1}^{r} v_j \nabla h_j(x^0).$$

Ist $y \in Z(x^0, u)$, so folgt sofort $y \in K(x^0, M)$ sowie

$$-\nabla f(x^0)^\mathsf{T} y = \sum_{i\in I(x^0)} u_i \nabla g_i(x^0)^\mathsf{T} y + \sum_{j=1}^{r} v_j \nabla h_j(x^0)^\mathsf{T} y = 0,$$

also $y \in C(x^0, f, M)$. Ist $y \in C(x^0, f, M)$, so gilt $y \in K(x^0, M)$ und somit $\nabla h_j(x^0)^\mathsf{T} y = 0$ $(\forall j)$ sowie $\nabla g_i(x^0)^\mathsf{T} y \le 0$ $(\forall i \in I(x^0))$. Daraus folgt

$$0 = -\nabla f(x^0)^\mathsf{T} y = \sum_{i\in I(x^0)} u_i \nabla g_i(x^0)^\mathsf{T} y + \sum_{j=1}^{r} v_j \nabla h_j(x^0)^\mathsf{T} y = \sum_{i\in I(x^0)} u_i \nabla g_i(x^0)^\mathsf{T} y.$$

In der letzten Summe sind alle Summanden kleiner oder gleich Null (wegen $u_i \ge 0$ und $\nabla g_i(x^0)^\mathsf{T} y \le 0$ für $i \in I(x^0)$), sie summieren sich nur zu Null auf, wenn sie alle gleich Null sind. Das bedeutet aber sofort

$$\begin{aligned} \nabla g_i(x^0)^\mathsf{T} y &= 0, \quad \text{falls } i \in I(x^0) \text{ mit } u_i > 0,\\ \nabla g_k(x^0)^\mathsf{T} y &\le 0, \quad \text{falls } k \in I(x^0) \text{ mit } u_k = 0, \end{aligned}$$

also folgt zusammen mit $\nabla h_j(x^0)^\mathsf{T} y = 0$ $(\forall j)$, dass $y \in Z(x^0, u)$. □

5.4.4 Satz. (Hinreichende Bedingung 2. Ordnung). *Wir betrachten die Standardaufgabe (P) und setzen voraus, dass die Funktionen f, g und h zweimal stetig differenzierbar sind. Sei (x^0, u, v) ein gegebener Punkt, der den Kuhn-Tucker-Bedingungen der Aufgabe (P) genügt und bezeichne mit*

$$H := \nabla^2_{xx} L(x^0, u, v) = \nabla^2 f(x^0) + \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla^2 g_i(x^0) + \sum_{j=1}^{r} v_j \nabla^2 h_j(x^0)$$

die Hesse-Matrix der Lagrangefunktion bezüglich x im Punkt (x^0, u, v). Falls

$$y^\mathsf{T} H y > 0 \quad \forall y \in C(x^0, f, M) \setminus \{0\},$$

gilt, so ist x^0 strikter lokaler Minimalpunkt von (P). ◇

Beweis. Wird unten im Punkt 5.4.12 gegeben. □

Die Bedingung des Satzes ist im allgemeinen schwer überprüfbar, da $C(x^0, f, M)$ durch ein lineares Ungleichungssystem beschrieben ist. Als Spezialfall folgt aber sofort (insbesondere ist das Korollar für Aufgaben *nur* mit Gleichungsrestriktionen zum vorigen Satz äquivalent):

5.4.5 Korollar. (Starke hinreichende Bedingung 2. Ordnung). *Unter den Voraussetzungen von Satz 5.4.4 sei wieder* (x^0, u, v) *ein gegebener Punkt, der den Kuhn-Tucker-Bedingungen der Aufgabe (P) genügt. Falls* $y^\mathsf{T} H y > 0$ *für alle* $y \neq 0$ *mit*

$$\nabla h_j(x^0)^\mathsf{T} y = 0,\ j = 1, \ldots, r,\ \ \nabla g_i(x^0)^\mathsf{T} y\ = 0,\ i \in I(x^0) \text{ mit } u_i > 0,$$

gilt, so ist x^0 *strikter lokaler Minimalpunkt.* ◇

5.4.6 Positive Definitheit unter linearen Nebenbedingungen. Die starke hinreichende Bedingung ist von der Form

$$y^\mathsf{T} H y > 0 \quad \forall y \neq 0 :\ By = 0 \tag{5.21}$$

mit einer Matrix B passender Ordnung (κ, n). Sei $\{y^1, \ldots, y^s\}$ eine Basis des Unterraums $\mathcal{L} := \{y | By = 0\}$. Dann ist

$$y \in \mathcal{L} \quad \Leftrightarrow \quad y = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j y^j,$$

in Matrixschreibweise

$$y = Y\lambda \quad \text{ mit } Y = [y^1\ \ldots\ y^s] \text{ (spaltenweise).}$$

Also gilt (5.21) genau dann, wenn $Y^\mathsf{T} H Y$ positiv definit ist, was mit Ihnen bekannten Kriterien aus der *Linearen Algebra für Ökonomen* überprüft werden kann. ◇

5.4.7 Spezialfall eines Kriteriums von Debreu. In der ökonomischen Literatur sind von Gerard Debreu (1983 Nobelpreis für Ökonomie) aufgestellte Kriterien zur Überprüfung der positiven Definitheit unter linearen Nebenbedingungen sehr beliebt, die mit Hauptminoren der "geränderten" Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ B^\mathsf{T} & H \end{pmatrix}$$

arbeiten, vgl. am besten die Originalarbeit *G. Debreu, Definite and semidefinite quadratic forms, Econometrica 20 (1952) 295-300* oder (nicht in voller Allgemeinheit) *Rommelfanger, Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler II.* Die allgemeine Herleitung übersteigt aber das Zeitvolumen dieser Vorlesung.

Wir betrachten hier nur den Spezialfall, der hilfreich ist für

$$\text{(Pspez)} \quad \min\{f(x_1, x_2) \,|\, g(x_1, x_2) = 0\}, \quad f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$$

Sei (x_1^0, x_2^0, v) ein Punkt, der den Lagrange-Bedingungen genügt, und sei $\nabla g(x_1^0, x_2^0) \neq 0$. Wir schreiben

$$H = \nabla^2 f(x_1^0, x_2^0) + v \nabla^2 g(x_1^0, x_2^0) \ \text{ und } \ c = \nabla g(x_1^0, x_2^0)^\mathsf{T}.$$

Der Beweis des folgenden Satzes wird unten im Punkt 5.4.14 gegeben. Man beachte das "Drehen" der Vorzeichen!

Satz. Unter den gestellten Voraussetzungen gelten folgende Kriterien mit Hilfe spezieller Determinanten, und zwar:

1. Die Bedingung
$$\det \begin{pmatrix} 0 & c^\top \\ c & H \end{pmatrix} < 0$$
ist notwendig und hinreichend dafür, dass $y^\top Hy > 0$ für alle $y \neq 0$ mit $c^\top y = 0$ gilt. Also ist unter dieser Bedingung x^0 lokaler Minimalpunkt der Aufgabe (Pspez).
2. Die Bedingung
$$\det \begin{pmatrix} 0 & c^\top \\ c & H \end{pmatrix} > 0,$$
ist notwendig und hinreichend dafür, dass $y^\top Hy < 0$ für alle $y \neq 0$ mit $c^\top y = 0$ gilt. Also ist unter dieser Bedingung x^0 lokaler Maximalpunkt der Aufgabe (Pspez). ◇

5.4.8 Vollständig durchrechnetes Beispiel. Man betrachte die Aufgabe mit linearen (!) Restriktionen

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2) - x_1 \\ \text{bezüglich} & g_1(x_1, x_2) := -x_1 + 2x_2 \leq 0 \\ & g_2(x_1, x_2) := -x_1 - 2x_2 \leq 0. \end{array}$$

Die Zielfunktion heisse f, Restriktionsmenge heisse M. Die Kuhn-Tucker-Bedingungen lauten

$$\begin{array}{ll} (i) & x_1 - 1 - u_1 - u_2 = 0 \\ (ii) & -x_2 + 2u_1 - 2u_2 = 0 \\ (iii) & u_1 \geq 0,\ -x_1 + 2x_2 \leq 0,\ u_1(-x_1 + 2x_2) = 0 \\ (iv) & u_2 \geq 0,\ -x_1 - 2x_2 \leq 0,\ u_2(-x_1 - 2x_2) = 0 \end{array}$$

Wählt man speziell $u_1 = u_2 = 0$, so definiert

$$u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 0$$

einen Kuhn-Tucker-Punkt. Allerdings ist $(x_1, x_2) = (1, 0)$ *kein* lokaler Minimalpunkt: Offenbar erfüllt $(1, 0)$ beide Nebenbedingungen strikt. Wäre also $(1, 0)$ lokaler Minimalpunkt, so wäre dieser Punkt auch ein lokaler Minimalpunkt der freien Minimierungsaufgabe $\min\{f(x_1, x_2) := \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2) - x_1 \mid (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}$. Nun ist aber

$$\det \nabla^2 f(1, 0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} < 0,$$

also ist $(1, 0)$ keine Extremalstelle.

Wählt man speziell $u_1 > 0$, $u_2 > 0$, so folgt wegen der Komplementarität in (iii) und (iv)

$$-x_1 + 2x_2 = 0, \quad -x_1 - 2x_2 = 0, \qquad \text{also } x_1 = x_2 = 0,$$

im Widerspruch zu (i), also gehört zu $u_1 > 0$, $u_2 > 0$ kein Kandidat für eine lokale Minimalstelle.

Wählt man speziell $u_1 = 0$, $u_2 > 0$, so folgt wegen der Komplementarität in (iv) $-x_1 - 2x_2 = 0$, also mit (i) und (ii)

$$x_1 = -2x_2 = u_2 + 1, \quad 2u_2 = -x_2.$$

Folglich definiert (nachrechnen!)

$$u_1 = 0,\ u_2 = \frac{1}{3},\ x_1 = \frac{4}{3},\ x_2 = -\frac{2}{3} \tag{5.22}$$

einen Kuhn-Tucker-Punkt $(\widetilde{x}, \widetilde{u})$.

Wählt man speziell $u_1 > 0$, $u_2 = 0$, so folgt wegen der Komplementarität in (iii) $-x_1 + 2x_2 = 0$, also mit (i) und (ii)

$$x_1 = 2x_2 = u_1 + 1, \quad 2u_1 = x_2.$$

Folglich definiert (nachrechnen!)

$$u_1 = \frac{1}{3},\ u_2 = 0,\ x_1 = \frac{4}{3},\ x_2 = \frac{2}{3}. \tag{5.23}$$

einen weiteren Kuhn-Tucker-Punkt (x^*, u^*).

Im Hinblick auf die hinreichenden Bedingungen 2. Ordnung in (5.22) und (5.23) sind die aktiven Indexmengen $I(\widetilde{x}) = \{2\}$ und $I(x^*) = \{1\}$, die Hesse-Matrix der Lagrangefunktion in Bezug auf x

$$H := \nabla^2_{xx} L(\widetilde{x}, \widetilde{u}) = \nabla^2_{xx} L(x^*, u^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sowie die kritischen Kegel $C(\widetilde{x}, f, M)$ (wegen $\widetilde{u}_2 > 0$)

$$C(\widetilde{x}, f, M) = \{(y_1, y_2) \mid -y_1 - 2y_2 = 0\}$$

und $C(x^*, f, M)$ (wegen $u_1^* > 0$)

$$C(x^*, f, M) = \{(y_1, y_2) \mid -y_1 + 2y_2 = 0\}.$$

Wir überprüfen Optimalität nun nach dem hinreichenden Kriterium 2. Ordnung (es fällt mit dem starken hinreichenden Kriterium 2. Ordnung zusammen): Für $\widetilde{x}$ haben wir

$$y^\mathsf{T} H y = y_1^2 - y_2^2 = 3y_2^2 > 0 \quad \text{für alle } (y_1, y_2) \neq (0,0) \text{ mit } y_1 = -2y_2,$$

für x^* haben wir

$$y^\mathsf{T} H y = y_1^2 - y_2^2 = 3y_2^2 > 0 \quad \text{für alle } (y_1, y_2) \neq (0,0) \text{ mit } y_1 = 2y_2,$$

also sind sowohl $\widetilde{x}$ als auch x^* lokale Minimalpunkte.

Da die kritischen Kegel Geraden sind, können wir als hinreichendes Kriterium auch das spezielle Debreu-Kriterium nachprüfen. Es gilt in $\widetilde{x}$ (man muss den Gradienten $c = \nabla g_2(\widetilde{x})$, der der Normalenvektor der Gleichung in $C(\widetilde{x}, f, M)$ ist, nehmen)

$$\det \begin{pmatrix} 0 & c^\mathsf{T} \\ c & H \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 < 0$$

und in x^* (man muss den Gradienten $d = \nabla g_1(x^*)$, der der Normalenvektor der Gleichung in $C(x^*, f, M)$ ist, nehmen)

$$\det \begin{pmatrix} 0 & d^\mathsf{T} \\ d & H \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 < 0,$$

also ist auch nach diesem Kriterium bestätigt, dass beide Punkte lokale Minimalpunkte sind. $\diamond$

Das Envelopen-Theorem

Eine interessante Anwendung der Kuhn-Tucker-Theorie und insbesondere der hinreichenden Bedingungen 2. Ordnung ist das sogenannte Envelopen-Theorem, das in der Mikroökonomie bei der Sensitivitätsanalysie der komparativen Statik eine grosse Rolle spielt. Eine recht ordentliche Darstellung der mathematischen Theorie findet man in Kapitel 19 des Lehrbuchs von Simon and Blume, leider gibt es in der Literatur einige sehr hemdsärmelige bis falsche Darstellungen (z.B. im renommierten Buch "Microeconomic theory" von Luenberger).

Wir betrachten die parametrische Aufgabe

$$\mathrm{P}(p): \quad \begin{array}{l} \text{Minimiere } \ f(x,p) \ \text{ bezüglich } x \text{ bei gegebenem } p \text{ unter den} \\ \text{Restriktionen } g_i(x,p) \le 0, \ i = 1,\dots,m\,, \ h_j(x,p) = 0, \ j = 1,\dots,r\,, \end{array} \tag{5.24}$$

wobei $f, g_i, h_j : \mathbb{R}^n \times \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen und $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^s$ eine offene Menge seien sowie p über $\mathcal{O}$ variiert. Zu jedem $p \in \mathcal{O}$ lauten die Kuhn-Tucker-Bedingungen in einer lokalen Minimallösung $x(p)$ von $\mathrm{P}(p)$ (unter der Abadie-CQ)

$$\begin{array}{rl} (i) & \nabla_x f(x(p),p) + \sum_{i=1}^m u_i \nabla_x g_i(x(p),p) + \sum_{j=1}^r v_j \nabla_x h_j(x(p),p) = 0, \\ (ii) & u_i \ge 0, \ g_i(x(p),p) \le 0, \ u_i g_i(x(p),p) = 0 \quad (i = 1,\dots,m), \\ (iii) & v_j \in \mathbb{R}, \ h_j(x(p),p) = 0 \qquad\quad (j = 1,\dots,r), \end{array} \tag{5.25}$$

Seien $I(x(p), p) = \{i \mid g_i(x(p), p) = 0\}$ und

$$L(x, u, v, p) := f(x, p) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x, p) + \sum_{j=1}^{r} v_j h_j(x, p).$$

Wir interessieren uns für Differenzierbarkeitseigenschaften der (lokalen) Optimalwertfunktion $f(x(p), p)$.

5.4.9 Satz. (Envelopen-Theorem). *Sei $p \mapsto (x(p), u(p), v(p))$ eine auf einer offenen Teilmenge U von $\mathcal{O}$ stetig differenzierbare Funktion derart, dass $(x(p), u(p), v(p))$ für jedes $p \in U$ den Kuhn-Tucker-Bedingungen (5.25) der Aufgabe P(p) genügt und $I(x(p), p)$ für alle $p \in U$ dieselbe Indexmenge I ist. Dann ist die Funktion*

$$\varphi(p) := f(x(p), p), \; p \in U,$$

auf U stetig differenzierbar, und es gilt für alle $p \in U$

$$\nabla\varphi(p) = \nabla_p L(x(p), u(p), v(p), p),$$

das heisst

$$\frac{\partial\varphi(p)}{\partial p_j} = \frac{\partial L(x(p), u(p), v(p), p)}{\partial p_j}, \; j = 1, \ldots, s, \tag{5.26}$$

wobei der letzte Term so zu lesen ist: man nehme die partielle Ableitung von $L(x, u, v, p)$ nach p_j im Punkt $(x(p), u(p), v(p), p)$. ◇

Beweis. Zu $p \in U$ kürzen wir ab

$$z(p) = (x(p), u(p), v(p)).$$

Nach Voraussetzung ist $\varphi(p) = f(x(p), p) = L(z(p), p)$. Die Kettenregel liefert

$$\begin{aligned} \nabla\varphi(p)^\top \;=\; & \nabla_x L(z(p), p)^\top Dx(p) + \nabla_u L(z(p), p)^\top Du(p) \\ & + \nabla_v L(z(p), p)^\top Dv(p) + \nabla_p L(z(p), p)^\top. \end{aligned} \tag{5.27}$$

Da $z(p) = (x(p), u(p), v(p))$ jeweils Kuhn-Tucker-Punkt mit $I(x(p), p) \equiv I$ ist, gilt für alle $p \in U$

$$\nabla_x L(z(p), p) = 0, \quad g_i(x(p), p) = 0, \, i \in I, \quad u_j(p) \equiv 0, \, j \notin I,$$

und damit auch

$$\nabla_u L(z(p), p)^\top Du(p) = g(x(p), p)^\top Du(p) = \sum_{i=1}^{m} g_i(x(p), p) \nabla u_i(p)^\top = 0.$$

Ferner ist wegen $h(x(p)) \equiv 0$

$$\nabla_v L(z(p), p)^\top Du(p) = h(x(p), p)^\top Dv(p) = 0,$$

so dass in (5.27) nur

$$\nabla\varphi(p)^\top = \nabla_p L(z(p), p)^\top$$

übrig bleibt, was zu zeigen war. □

5.4.10 Hinreichende Bedingungen für das Envelopen-Theorem. Satz 5.4.9 ist ganz allgemein formuliert, die Funktion $\varphi(p) = f(x(p), p) = L(x(p), u(p), v(p), p)$ ordnet jedem p nur den Wert in einem Kuhn-Tucker-Punkt zu, von Optimalität ist nicht die Rede. Insbesondere können verschiedenen Kuhn-Tucker-Punkten zum gleichen p verschiedene Werte zugeordnet werden. Es steht also (selbst im Falle konvexer Aufgaben) die Frage nach der Existenz der benötigten stetig differenzierbaren Funktion $(x(\cdot), u(\cdot), v(\cdot))$, überdies möchte man die lokale Eindeutigkeit der Lösung haben und Aussagen zur (lokalen) Optimalität von $x(p)$ erhalten. Ein Kriterium liefert dazu der folgende Satz, der unten in Punkt 5.4.13 bewiesen wird.

Satz. Sei $z^0 = (x^0, u^0, v^0)$ ein Punkt, der dem Kuhn-Tucker-System (5.25) der Aufgabe $\mathrm{P}(p^0)$ zu einem gegebenen $p^0 \in \mathcal{O}$ genügt. Die Funktionen f, g_i und h_j seien zweimal stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^n \times \mathcal{O}$. Wir setzen ferner voraus, dass

- LICQ in x^0 bezüglich $\mathrm{P}(p^0)$ erfüllt ist,
- $u_i^0 > 0$ für alle $i \in I(x^0, p^0)$ gilt ("strikte Komplementarität") und
- z^0 der starken hinreichende Bedingung 2. Ordnung von Korollar 5.4.5 bezüglich $\mathrm{P}(p^0)$ genügt.

Dann existieren Umgebungen U von p und V von z^0, so dass gilt

(i) Das Kuhn-Tucker-System (5.25) hat zu jedem $p \in U$ eine in V eindeutige Lösung $z(p) = (x(p), u(p), v(p))$, wobei $x(p)$ strikter lokaler Minimalpunkt von $\mathrm{P}(p)$ ist.

(ii) Die Funktion $z(\cdot)$ ist stetig differenzierbar in jedem Punkt $p \in U$, und es gilt $I(x(p), p) = I(x^0, p^0)$ für alle $p \in U$.

Damit ist auf U die lokale Optimalwertfunktion $\varphi(p) = f(x(p), p) = L(x(p), u(p), v(p), p)$ stetig differenzierbar, und es gilt (5.26), vgl. das Envelopen-Theorem. $\diamond$

5.4.11 Beispiel. In der Nutzenmaximierungstheorie der Mikroökonomik definiert man eine *indirekte Nutzenfunktion* durch

$$\nu(p, M) := \max_x \{U(x) \,|\, p^\mathsf{T} x = M,\ x \geq 0\},$$

wobei $U(\cdot)$ eine konkave, stetig differenzierbare Nutzenfunktion sei, $x \in \mathbb{R}^n_+$ ein Güterbündel, $p > 0$ der entsprechende Preisvektor und M ein fixer Geldbetrag, über den der Konsument verfügt. Offenbar handelt es sich um ein konvexes Optimierungsproblems, denn es ist ja äquivalent zur Minimierung von $-U(\cdot)$ bezüglich der linearen Nebenbedingungen. Sei vorausgesetzt, dass $x = x(p, M) > 0$ eine Optimallösung der Aufgabe ist, die mit (p, M) stetig differenzierbar variiert. Dann können wir in der (parametrischen) Lagrangefunktion die Vorzeichenbeschränkungen ignorieren und definieren mit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$L(x, \lambda, p, M) := U(x) + \lambda(M - p^\mathsf{T} x).$$

Zur Optimallösung $x(p,M)$ gehört dann der Multiplikator $\lambda = \lambda(p,M)$. Nach Voraussetzung gilt $\nu(p,M) = U(x(p,M))$. Das Envelopen-Theorem liefert dann

$$\frac{\partial \nu(p,M)}{\partial M} = \lambda(p,M) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \nu(p,M)}{\partial p_j} = -\lambda(p,M) x_j(p,M)$$

und damit die sogenannte *Identität von Roy*

$$\frac{\partial \nu}{\partial p_j} + x_j \frac{\partial \nu}{\partial M} = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Bei $\lambda(p,M) \neq 0$ ist dann also x über die partiellen Ableitungen von ν bestimmbar. ◇

Anhang: Diverse Beweise

5.4.12 Beweis von Satz 5.4.4. Sei (x^0, u, v) ein Kuhn-Tucker-Punkt, der den Voraussetzungen des Satzes genüge. Wir zeigen eine Aussage, die sogar stärker ist als zu sagen, dass x^0 ein strikter lokaler Minimalpunkt ist, und zwar:

$$\exists \varepsilon, c > 0 \; \forall x \in B^\circ(x^0, \varepsilon) \cap M : \quad f(x) \geq f(x^0) + c\|x - x^0\|^2. \tag{5.28}$$

Angenommen, (5.28) ist falsch. Dann existiert eine Folge

$$\{x^k\} \subset M \setminus \{x^0\} : \; x^k \to x^0 \;\; \text{und} \;\; \frac{f(x^k) - f(x^0)}{\|x^k - x^0\|^2} < \frac{1}{k} \; \forall k \in \mathbb{N}. \tag{5.29}$$

Also gilt

$$\limsup_{k \to \infty} \frac{f(x^k) - f(x^0)}{\|x^k - x^0\|^2} \leq 0. \tag{5.30}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit existiere ein $\bar{y}$ mit

$$y^k := \frac{x^k - x^0}{\|x^k - x^0\|} \to \bar{y},$$

andernfalls wähle eine konvergente Teilfolge (die wegen der Kompaktheit des Randes der Einheitskugel existiert). Nach Taylorentwicklung 1. Ordnung und (5.29) folgt

$$(x^k - x^0)^\mathsf{T} \nabla f(x^0) + o(x^k - x^0) = f(x^k) - f(x^0) < \frac{1}{k}\|x^k - x^0\|^2.$$

Nach Division durch $\|x^k - x^0\|$ und Grenzübergang folgt

$$\bar{y}^\mathsf{T} \nabla f(x^0) \leq 0. \tag{5.31}$$

Sei nun φ irgendeine der Funktionen g_i, $i \in I(x^0)$, bzw. h_j oder $-h_j$, $j = 1, \ldots, m$. Nach Taylorentwicklung und wegen $\varphi(x^0) = 0$ sowie $\varphi(x^k) \leq 0$ gilt dann

$$0 \geq \varphi(x^k) - \varphi(x^0) = (x^k - x^0)^\mathsf{T} \nabla \varphi(x^0) + o(x^k - x^0),$$

d.h., nach Division durch $\|x^k - x^0\|$ und Grenzübergang folgt

$$\bar{y}^\mathsf{T} \nabla\varphi(x^0) \le 0.$$

Also ist

$$\bar{y} \in K(x^0, M).$$

Da (x^0, u, v) Kuhn-Tucker-Punkt ist, folgt – wie oben mehrfach benutzt (man brauchte dazu weder die Abadie-CQ noch Konvexität) – $\nabla f(x^0)^\mathsf{T} y \ge 0$ für alle y in $K(x^0, M)$, also gilt zusammen mit (5.31)

$$\bar{y} \in C(x^0, f, M), \quad \|\bar{y}\| = 1,$$

d.h., $\bar{y}$ ist nicht der Nullvektor und liegt im kritischen Kegel der Aufgabe (P) im Punkt x^0. Damit gilt für diese Richtung wegen der Bedingung 2. Ordnung

$$\alpha := \bar{y}^\mathsf{T} H \bar{y} > 0, \quad \text{mit } H = \nabla^2_{xx} L(x^0, u, v).$$

Wir benutzen zu dem festen Vektor (u, v) die Abkürzung

$$\tau(x) := L(x, u, v) = f(x) + u^\mathsf{T} g(x) + v^\mathsf{T} h(x),$$

d.h., speziell ist

$$\tau(x^0) = f(x^0) \quad \text{(Komplementarität)}$$

und

$$\nabla\tau(x^0) = \nabla_x L(x^0, u, v) = 0 \quad \text{(Lagrange-Bedingung)}$$

sowie

$$\nabla^2 \tau(x^0) = H.$$

Ferner setzen wir $t_k := \|x^k - x^0\|$ und erhalten dann wegen $u \ge 0$, $g(x^k) \le 0$ und $h(x^k) = 0$ (jeweils komponentenweise) und mit Taylor-Entwicklung

$$\begin{aligned}
f(x^k) &\ge f(x^k) + u^\mathsf{T} g(x^k) + v^\mathsf{T} h(x^k) \\
&= \tau(x^k) \\
&= \tau(x^0) + (x^k - x^0)\nabla\tau(x^0) + \tfrac{1}{2}(x^k - x^0)^\mathsf{T} \nabla^2\tau(x^0)(x^k - x^0) + o(t_k^2) \\
&= f(x^0) + \tfrac{1}{2}\, t_k^2\, {y^k}^\mathsf{T} H y^k + o(t_k^2),
\end{aligned}$$

wobei $o(t_k^2)/(t_k^2) \to 0$ mit $k \to \infty$ wie üblich. Nach Division durch t_k^2 folgt dann

$$\frac{f(x^k) - f(x^0)}{t_k^2} - \frac{o(t_k^2)}{t_k^2} \ge \tfrac{1}{2}\, {y^k}^\mathsf{T} H y^k \ge \frac{1}{4}\alpha,$$

falls k genügend gross ist (denn $\alpha := \bar{y}^\mathsf{T} H \bar{y} > 0$ und $y^k \to \bar{y}$). Es folgt also nach Grenzübergang und wegen (5.30)

$$0 < \frac{1}{4}\alpha \le \limsup_{k\to\infty} \frac{f(x^k) - f(x^0)}{t_k^2} \le 0,$$

ein Widerspruch! Damit war die Annahme falsch und die gewünschte Aussage (5.28) ist bewiesen. □

5.4.13 Beweis von Satz 5.4.10. Der einfacheren Schreibweise wegen halber lassen wir die Gleichungen weg, sie verhalten sich unter unseren Voraussetzungen wie die aktiven Ungleichungen. Im verbleibenden Kuhn-Tucker-System betrachten wir mit $I := I(x^0, p^0)$ das Teilsystem

$$\nabla_x L(x, u, v, p) = 0, \;\; g_i(x, p) = 0, \, i \in I, \;\; u_j = 0, \, j \notin I. \tag{5.32}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $I = \{1, \ldots, k\}$, $k \leq m$. Wir schreiben das eben betrachtete Gleichungssystem mit Hilfe einer Vektorfunktion als

$$F(x, u, p) := \begin{pmatrix} \nabla_x L(x, u, p) \\ g_1(x, p) \\ \vdots \\ g_k(x, p) \\ u_{k+1} \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = 0.$$

Dann gilt, wenn wir g_i, $i \in I$, zu einer Vektorfunktion g_I zusammenfassen, die restlichen g_j, $j \notin I$ zu g_J zusammenfassen und mit E die $(m-k, m-k)$-Einheitsmatrix bezeichnen,

$$D_{(x,u)} F(x, u, p) = \begin{pmatrix} \nabla^2_{xx} L(x, u, p) & D_x g_I(x, p)^\mathsf{T} & D_x g_J(x, p)^\mathsf{T} \\ D_x g_I(x, p) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}.$$

Wir zeigen nun, dass die quadratische Matrix $D_{(x,u)} F(x^0, u^0, p^0)$ regulär ist. Wegen der Einheitmatrix rechts unten ist das äquivalent zum Nachweis, dass die Teilmatrix

$$\begin{pmatrix} \nabla^2_{xx} L(x^0, u^0, p^0) & D_x g_I(x^0, p^0)^\mathsf{T} \\ D_x g_I(x^0, p^0) & 0 \end{pmatrix}.$$

regulär ist. Wir schreiben $H := \nabla^2_{xx} L(x^0, u^0, p^0)$ und $B := D_x g_I(x^0, p^0)$. Falls mit passenden Vektoren λ und μ

$$\begin{pmatrix} H & B^\mathsf{T} \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = 0$$

erfüllt ist, gilt also $H\lambda + B^\mathsf{T}\mu = 0$ sowie $B\lambda = 0$. Daraus folgt

$$\lambda^\mathsf{T} H \lambda = \lambda^\mathsf{T} H \lambda + \lambda^\mathsf{T} B^\mathsf{T} \mu = 0.$$

Wegen der starken hinreichenden Bedingung 2. Ordnung gilt $y^\mathsf{T} H y > 0$ für alle $y \neq 0$ mit $By = 0$, wegen $B\lambda = 0$ folgt also $\lambda = 0$. Das impliziert $B^\mathsf{T}\mu = 0$, was wegen der LICQ auf $\mu = 0$ führt (denn: die Spalten von B^T sind gerade die Gradienten $\nabla_x g_i(x^0, p^0)$, $i \in I$, die wegen der LICQ linear unabhängig sind). Damit ist

$$\begin{pmatrix} H & B^\mathsf{T} \\ B & 0 \end{pmatrix} \quad \text{regulär,}$$

folglich ist $D_{(x,u)}F(x^0, u^0, p^0)$ regulär. Somit sind für das Gleichungssystem $F(x, u, p) = 0$ in $(x, u, p) = (x^0, u^0, p^0)$ die Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen erfüllt, und wir erhalten so die Existenz einer lokal eindeutigen Lösungsfunktion $(x(p), u(p))$ des Teilsystems (5.32) des Kuhn-Tucker-Systems, die "nahe" $p = p^0$ stetig differenzierbar (und damit stetig) ist. Insbesondere können dann die Umgebungen U von p^0 und V von (x^0, u^0) so klein gewählt werden, dass auch

$$g_j(x(p), p) < 0 \ (\forall j \notin I) \quad \text{und} \quad u_i(p) > 0 \ (\forall i \in I) \quad \forall p \in U$$

erfüllt ist, denn nach Voraussetzung bzw. dem oben Gezeigten gilt $g_j(x^0, p^0) < 0$ und g_j ist stetig $(j \notin I)$, ebenso $x(\cdot)$, und es gilt $u_i(p^0) = u_i^0 > 0$ und $u_i(\cdot)$ ist stetig $(i \in I)$. Speziell haben wir für $p \in U$ erhalten

$$I(x(p), p) \equiv I,$$

und es erfüllt $(x(p), u(p))$ das gesamte Kuhn-Tucker-System zum Parameter p. Endlich bemerken wir, dass die starke hinreichende Bedingung 2. Ordnung sich auf eine kleine Umgebung von (x^0, u^0) (ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei das $U \times V$) fortsetzt, wie man sich leicht überlegt. Damit sind alle Aussagen bewiesen. $\square$

5.4.14 Beweis von Satz 5.4.7. Wir beweisen nur Aussage 1., das heisst,

$$\det \begin{pmatrix} 0 & c^\mathsf{T} \\ c & H \end{pmatrix} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad y^\mathsf{T} H y > 0 \ \forall y \neq 0 : \ c^\mathsf{T} y = 0.$$

Der Beweis von Aussage 2. ist analog. Wir führen den Beweis für eine beliebige symmetrische Matrix $H = (h_{ij})$ der Ordnung 2 und einen beliebigen Vektor $c \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Wir definieren eine $(3, 3)$-Matrix $R(\mu)$ mit nützlichen Eigenschaften:

$$R(\mu) := \begin{pmatrix} -1 & o^\mathsf{T} \\ \mu c & H + \mu c c^\mathsf{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & c^\mathsf{T} \\ \mu c & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c^\mathsf{T} \\ o & I \end{pmatrix}, \tag{5.33}$$

wobei $\mu > 0$, $o = (0, 0)^\mathsf{T}$ und $I =$ Einheitsmatrix. Dann gilt offenbar

$$\det R(\mu) = \det \begin{pmatrix} -1 & c^\mathsf{T} \\ \mu c & H \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \det R(\mu) = -\det(H + \mu c c^\mathsf{T}). \tag{5.34}$$

Sei zunächst $\det \left(\begin{smallmatrix} 0 & c^\mathsf{T} \\ c & H \end{smallmatrix}\right) < 0$. Dann folgt

$\exists \mu_0 > 0 : \ \det \left(\begin{smallmatrix} -1/\mu & c^\mathsf{T} \\ c & H \end{smallmatrix}\right) < 0 \ \ \forall \mu \geq \mu_0$ wegen der Stetigkeit der Determinante,

$\Rightarrow$ $\det R(\mu) < 0 \ \ \forall \mu \geq \mu_0$ nach (5.34) und wegen $\det R(\mu) = \mu \det \left(\begin{smallmatrix} -1/\mu & c^\mathsf{T} \\ c & H \end{smallmatrix}\right)$, $\mu > 0$,

$\Rightarrow$ $\det(H + \mu c c^\mathsf{T}) = \det(h_{ij} + \mu c_i c_j) > 0 \ \ \forall \mu \geq \mu_0$ nach (5.34),

$\Rightarrow$ $\exists \widetilde{\mu} \geq \mu_0 : \det(H + \widetilde{\mu} c c^\mathsf{T}) > 0$ und $h_{ii} + \widetilde{\mu} c_i^2 > 0$ $(i = 1, 2)$, denn wegen $c \neq 0$ ist z.B. $c_1 \neq 0$, also wird für grosses $\mu > 0$ auch $\mu c_1^2 > 0$ gross – und für ein gewisses $\widetilde{\mu} \geq \mu_0$ gilt somit $h_{11} + \widetilde{\mu} c_1^2 > 0$, schliesslich muss dann auch $h_{22} + \widetilde{\mu} c_2^2$ grösser Null sein wegen der Rechenregeln für $(2, 2)$-Determinanten,

$\Rightarrow$ die Matrix $(H + \widetilde{\mu} cc^\mathsf{T})$ ist positiv definit (Argument der linearen Algebra),

$\Rightarrow$ $y^T H y = y^T (H + \widetilde{\mu} cc^\mathsf{T}) y > 0 \;\; \forall y \neq 0 : \, c^\mathsf{T} y = 0,$

was für diese Richtung zu zeigen war.

Sei nun $y^T H y > 0 \;\; \forall y \neq 0 : \, c^\mathsf{T} y = 0$. Wir wählen ein festes $\bar{y} \neq 0$ mit $c^\mathsf{T} \bar{y} = 0$. Dann bildet $\{\bar{y}, c\}$ eine orthogonale Basis des $\mathbb{R}^2$, die wir zu einer $(2,2)$-Matrix

$$B = [\bar{y} \; c] \quad \text{(spaltenweise geschrieben)}$$

zusammenfassen. Dann folgt wegen $\bar{y}^\mathsf{T} H \bar{y} > 0$ sowie wegen $c \neq 0$ und somit $c^\mathsf{T} c > 0$: Es existiert ein $\mu_0 > 0$, so dass für alle $\mu \geq \mu_0$ gilt

$$\varrho(\mu) := \det \begin{pmatrix} \bar{y}^\mathsf{T} H \bar{y} & \bar{y}^\mathsf{T} H c \\ \bar{y}^\mathsf{T} H c & c^\mathsf{T} H c + \mu (c^\mathsf{T} c)^2 \end{pmatrix} = \mu (\bar{y}^\mathsf{T} H \bar{y})(c^\mathsf{T} c)^2 + (\bar{y}^\mathsf{T} H \bar{y})(c^\mathsf{T} H c) - (\bar{y}^\mathsf{T} H c)^2 > 0.$$

Folglich gilt unter Beachtung von $c^\mathsf{T} \bar{y} = 0$

$$\det \left(\, B^\mathsf{T} (H + \mu cc^\mathsf{T}) B \, \right) = \det \left(\begin{bmatrix} \bar{y}^\mathsf{T} \\ c^\mathsf{T} \end{bmatrix} (H + \mu cc^\mathsf{T}) [\bar{y} \; c] \right) = \varrho(\mu) > 0 \;\; \forall \mu \geq \mu_0. \quad (5.35)$$

Nach den Determinantenregeln gilt $\det \left(\, B^\mathsf{T} (H + \mu cc^\mathsf{T}) B \, \right) = (\det B)^2 (\det(H + \mu cc^\mathsf{T}))$ und somit folgt aus (5.35) wegen der Regularität von B

$$\det(H + \mu cc^\mathsf{T}) > 0 \quad \forall \mu \geq \mu_0.$$

Die Beziehungen in (5.34) liefern dann

$$\det \begin{pmatrix} -1 & c^\mathsf{T} \\ \mu c & H \end{pmatrix} = \det R(\mu) = -\det(H + \mu cc^\mathsf{T}) < 0 \quad \forall \mu \geq \mu_0. \quad (5.36)$$

Die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & c^\mathsf{T} \\ c & H \end{smallmatrix}\right)$ ist regulär, vgl. den Beweis in Punkt 5.4.13, also ist $\det \left(\begin{smallmatrix} 0 & c^\mathsf{T} \\ c & H \end{smallmatrix}\right) \neq 0$. Aus (5.36) folgt dann nach der Laplace-Entwicklung für Determinanten

$$0 > \det \begin{pmatrix} -1 & c^\mathsf{T} \\ \mu c & H \end{pmatrix} = - \det H + \mu \det \begin{pmatrix} 0 & c^\mathsf{T} \\ c & H \end{pmatrix} \quad \forall \mu \geq \mu_0 \quad (5.37)$$

und folglich

$$\det \begin{pmatrix} 0 & c^\mathsf{T} \\ c & H \end{pmatrix} < 0,$$

da im Falle $\det \left(\begin{smallmatrix} 0 & c^\mathsf{T} \\ c & H \end{smallmatrix}\right) > 0$ die rechte Seite in (5.37) mit $\mu \to \infty$ positive Werte annähme. Damit ist auch die zweite Richtung in Aussage 1. bewiesen. $\square$