OPERATIONS MANAGEMENT

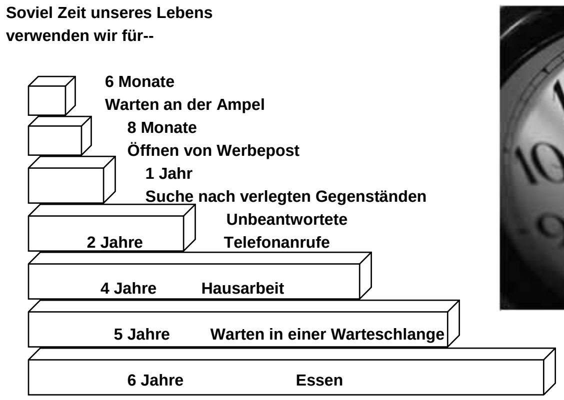
- Kurzfristige Kapazitätsplanung -

Lernziele

Nach dieser Veranstaltung sollten Sie wissen,

- welcher Trade-off zwischen Warte- und Servicekosten besteht
- wovon das subjektive Wartezeitempfinden abhängt und wie es sich beeinflussen lässt
- aus welchen Grundelementen ein Warteschlangensystem besteht
- inwieweit poissonverteilte Ankunftsraten dem exponentiellverteilten Zeitabstand zwischen 2 Ankünften entsprechen
- wie man die wichtigsten Warteschlangenmodelle anwendet
- wie die wichtigsten Performancekriterien von Warteschlangensystemen berechnet werden können
- inwiefern Kapazitätsentscheidungen auf der Basis von Warteschlangenmodellen getroffen werden können

Wie zerrinnt unsere Zeit?



Quelle: U.S. News & World Report, 30.1.1989, S. 81

Wartephänomene

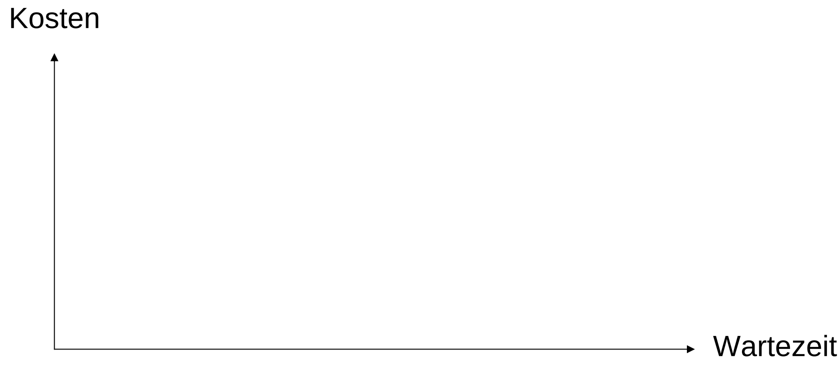
- ***Unausweichlichkeit*:** Wartezeit ist das unausweichliche Ergebnis unterschiedlicher Veränderungen bei der Ankunftsrate und der Servicerate
- ***Warteökonomik*:** Hohe Serverauslastung kann nur durch Wartezeiten der Kunden erkauft werden => Trade off zwischen Auslastung und Wartezeit
  - Auswege:
    - Produktive Wartezeit (Salatbuffet)
    - Profitable Wartezeit (Empfangsbar)

2 Komponenten des Warteschlangenmanagements

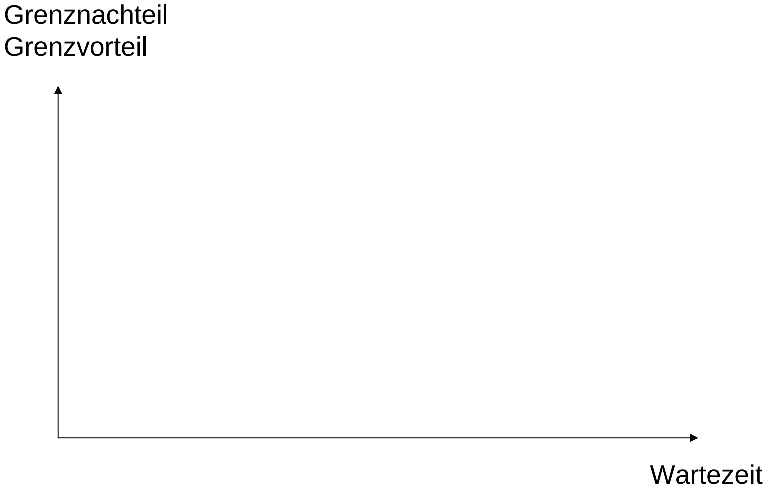
- Tatsächliche Wartezeit
  - Objektiv
  - Messbar
  - Warteschlangenmodelle
- Beispiel:
  - Verringerung der tatsächlichen Wartezeit durch zusätzlichen Hotelaufzug

- Empfundene Wartezeit
  - Subjektiv
  - Nicht messbar
  - Psychologische Studien
- Beispiel:
  - Verringerung der empfundenen Wartezeit durch Spiegel vor den Hotelaufzügen

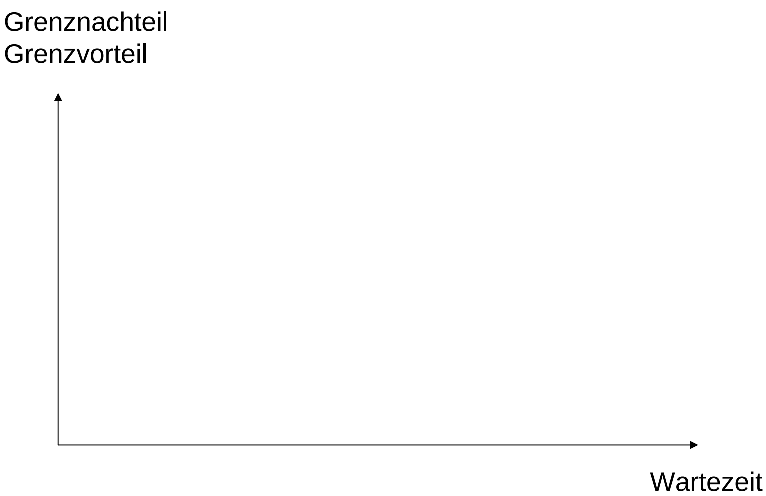
Trade-off im Warteschlangenmanagement



Trade-off-Optimierung



Trade-off und Opportunitätskosten



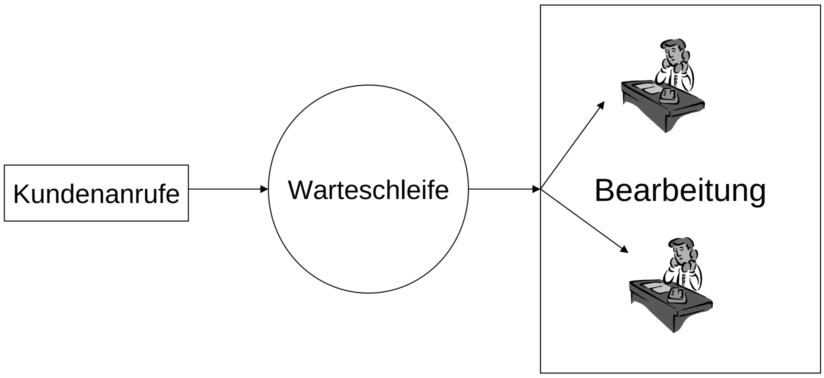
Warteschlangenpsychologie

Subjektives Zeitempfinden länger	*Subjektives Zeitempfinden kürzer*
Warten ohne Ablenkung/Beschäftigung	Warten mit Ablenkung/Beschäftigung
Unerwartete Wartezeit	Geplante Wartezeit
Allein warten	In der Gruppe warten
Wartezeit außerhalb des Serviceprozesses	Wartezeit innerhalb des Serviceprozesses
Besorgtes Warten	Entspanntes Warten

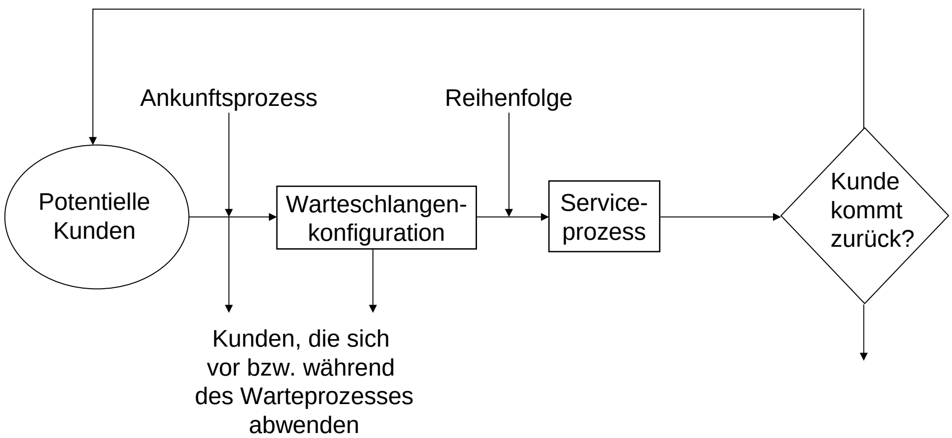
Verringerung der empfundenen Wartezeit

- Gerechte vs. ungerechte Wartezeiten
  – Nummern- und Einschlangensystem (aber: Supermarkt), keine Telefonanrufe!
- Bequeme vs. unbequeme Wartezeiten
  – Empfangsbar in Restaurants, Bestuhlung, Unterhaltung
- Erklärte vs. unerklärte (besorgniserregende) Wartezeit
  – Abflugverzögerung wegen Enteisung der Tragflächen
- Beschäftigtes vs. beschäftigungsloses Warten
  – Wartelounge mit Fax- und Internetanschluss
- Wartezeiten außerhalb vs. innerhalb des Systems
  – Vorprogramm im Kino

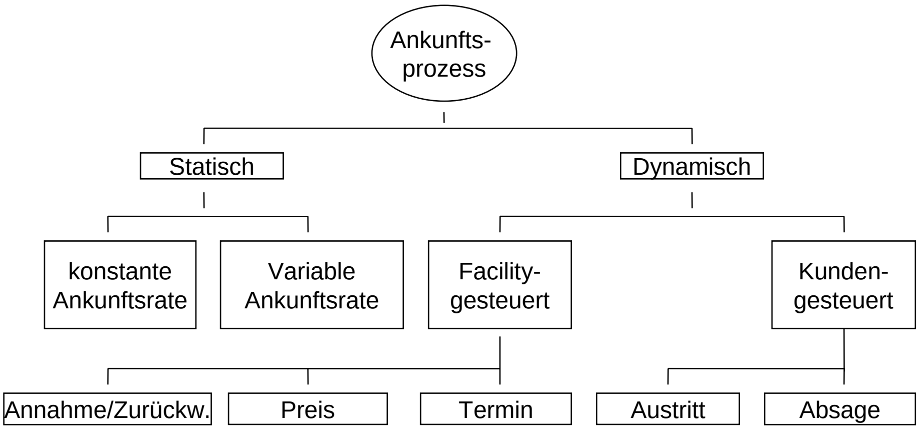
Warteschlangensysteme



Grundelemente von Warteschlangensystemen



Ankunftsprozess



Exponentialverteilung (stetig)

Dichtefunktion: $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ $t \geq 0$

λ = durchschnittliche Ankunftsrate pro Zeiteinheit (z.B. Minuten, Stunden, Tage)
t = Zeitabstand zwischen 2 Ankünften
e = 2.718...

Verteilungsfunktion: $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ $t \geq 0$

Mittelwert:

Varianz:

Poissonverteilung (diskret)

Dichtefunktion: $f(n) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$ $n = 0,1,2,3,\ldots$

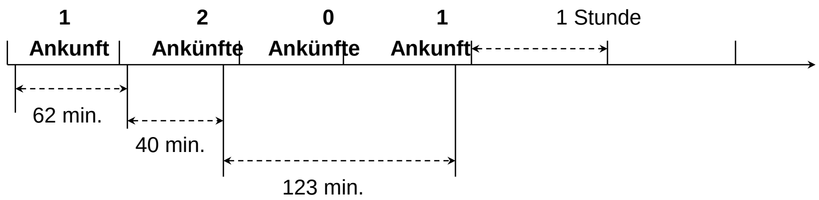
λ = durchschnittliche Ankunftsrate pro Zeiteinheit (z.B. Minuten, Stunden, Tage)
t = Anzahl der Zeitperioden (i.d.R. 1)
n = Anzahl der Ankünfte (0,1,2,...)
e = 2.718...

Mittelwert:

Varianz:

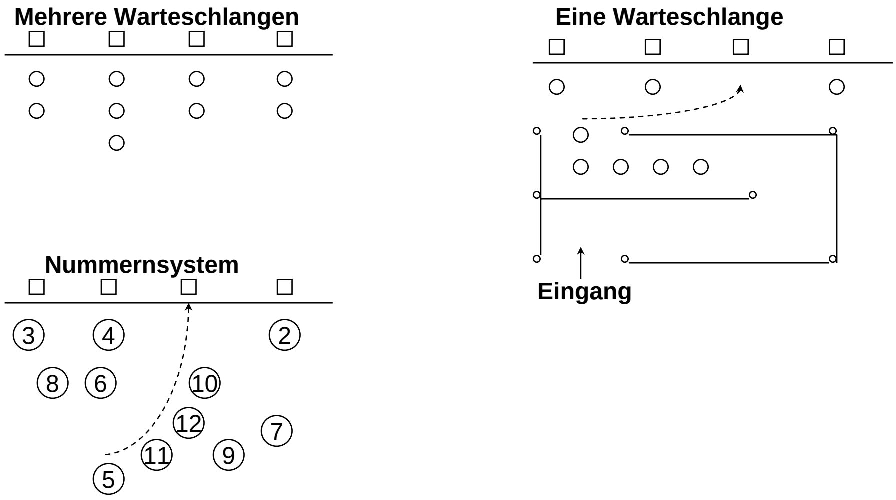
Äquivalenz zwischen Poisson- und Exponentialverteilung

Poissonverteilung für die Anzahl der Ankünfte pro Stunde (oben)



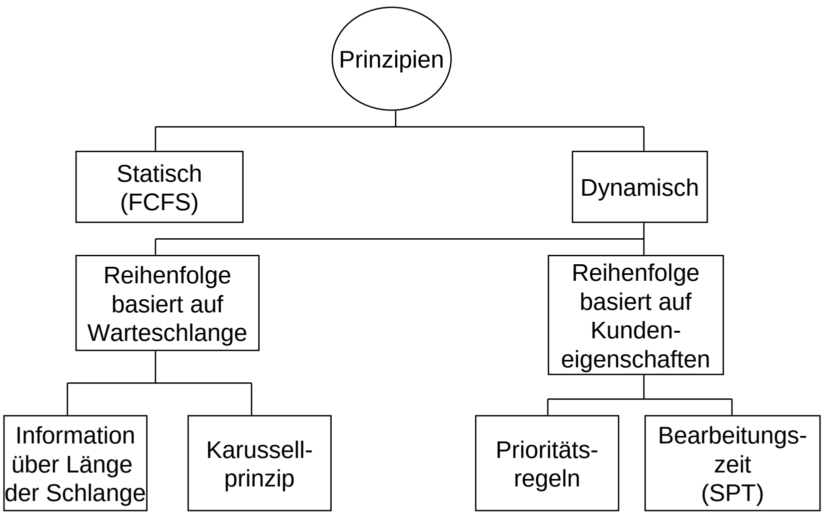
Exponentialverteilung der Zeitabstände zwischen 2 Ankünften in Minuten (unten)

Warteschlangenkonfiguration



Helmut M. Dietl 17

Reihenfolge

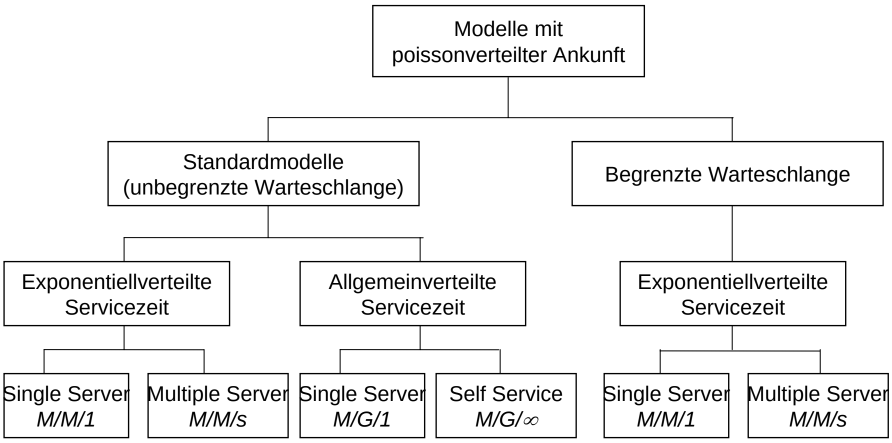


Helmut M. Dietl 18

Serveranordnung

Servicefacility	*Serveranordnung*
Parkplatz	**Selbstbedienung**
Cafeteria	**Server hintereinander**
Mautstelle	**Server parallel**
Supermarkt	**Selbstbedienung (1. Stufe); Parallel-Server (2.Stufe)**
Krankenhaus	**Viele Servicecenter (parallel und hintereinander)**

Warteschlangenmodelle im Überblick



A/B/C **Notation:** ***A*** **beschreibt die Verteilung der Zeitabstände zwischen 2 Ankünften,** ***B*** **beschreibt die Verteilung der Servicezeit und** ***s*** **(oder** ***c*****) die Anzahl der Server.**
M **beschreibt die Exponentialverteilung,** ***G*** **irgendeine allgemeine Verteilung (z.B. Normalverteilung, Gleichverteilung, etc.)**

Standard M/M/1-Modell

- Voraussetzungen:
  - Unbegrenzte oder sehr große Menge potentieller Kunden
  - Zeitabstände zwischen 2 Ankünften sind negativ exponentialverteilt bzw. Ankunftsrate ist poissonverteilt
  - Eine unbegrenzte Warteschlange ohne Abwanderung von Kunden
  - FCFS
  - Ein Server mit negativ exponentiell verteilter Servicezeit bzw. poissonverteilter Servicerate
  - $\lambda < \mu$

M/M/1

Poissonverteilte Ankunfts- und Servicerate ($\lambda < \mu$)

Durchschnittliche Ankunftsrate: λ

Durchschnittliche Servicerate: μ

Durchschnittlicher Auslastungsgrad:

Wahrscheinlichkeit, dass sich genau n Kunden im System befinden:

Wahrscheinlichkeit, dass sich k oder mehr Kunden im System befinden:

M/M/1

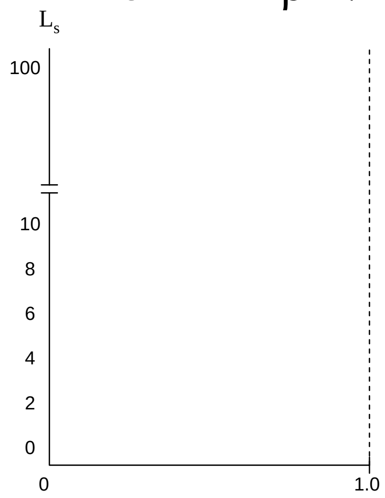
Durchschnittliche Anzahl von Kunden im System: $Ls = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$

Durchschnittliche Länge der Warteschlange: $Lq = \frac{\rho \lambda}{\mu - \lambda}$

Durchschnittliche Verweildauer im System: $Ws = \frac{1}{\mu - \lambda}$

Durchschnittliche Verweildauer in der Warteschlange: $Wq = \frac{\rho}{\mu - \lambda}$

Wie ändert sich die Länge der Warteschlange, wenn $\rho \rightarrow 0$?



$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

$L_s = \frac{\rho}{1-\rho}$

ρ	L_s
0	0
0.2	0.25
0.5	1
0.8	4
0.9	9
0.99	99

Beispiel 1: Eisverkäufer

- Pro Stunde kommen durchschnittlich 80 Kunden.
- Der Verkäufer benötigt je Kunde durchschnittlich 30 Sekunden.
- Ankunftsrate der Kunden ist poissonverteilt.
- Servicerate ist poissonverteilt.

Fragen zum Eisverkäufer-Beispiel

1. Wie hoch ist der durchschnittliche Auslastungsgrad des Eisverkäufers?
2. Wie lang ist die durchschnittliche Warteschlange vor dem Eisverkäufer?
3. Wie viele Kunden befinden sich durchschnittlich im „System“ (Warteschlange + Bedienung)?
4. Wie lange verweilt ein Kunde durchschnittlich in der Warteschlange (durchschnittliche Wartezeit)?
5. Wie lange verweilt ein Kunde durchschnittlich im „System“ (durchschnittliche Verweilzeit)?

Eisverkäufer-Beispiel

1. Durchschnittlicher Auslastungsgrad des Eisverkäufers

$$\lambda = 80 \text{ Kunden/Stunde}$$

$$\mu = \frac{1 \text{ Kunde}}{30 \text{ Sekunden}(1 \text{ Stunde} / 3600 \text{ Sekunden})} = 120 \text{ Kunden / Stunde}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{80 \text{ Kunden/Stunde}}{120 \text{ Kunden/Stunde}} = 0{,}67 = 67\%$$

Eisverkäufer-Beispiel

2. Durchschnittliche Länge der Warteschlange

$$Lq = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} =$$

3. Durchschnittliche Anzahl der Kunden im System

$$Ls = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} =$$

Eisverkäufer-Beispiel

4. Durchschnittliche Wartezeit

$$Wq = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} =$$

5. Durchschnittliche Verweilzeit

$$Ws = \frac{1}{\mu - \lambda} =$$

M/M/1-Modell mit begrenzter Warteschlange

- Eisverkäuferbeispiel:
  - Eisverkäufer möchte einen McIce Drive in Kiosk betreiben.
  - Wie viele Autos müssen in der Drive-in-Schlange mindestens Platz haben, damit mit mehr als 90%iger Wahrscheinlichkeit keine Autos auf der Strasse warten müssen?
  - Ansonsten wie zuvor
  - Lösung: $P(n \geq k) = \rho^k$ $P(n \geq 5) = \rho^5 = 0.13$

$$P(n \geq 6) = \rho^6 = 0.09$$

M/G/1-Modell

$$Lq = \frac{\rho^2 + \lambda^2\sigma^2}{2(1-\rho)}$$

1. Für Exponentialverteilung gilt: $\sigma^2 = \frac{1}{\mu^2}$ => $Lq = \frac{\rho^2 + \lambda^2/\mu^2}{2(1-\rho)} = \frac{2\rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{\rho^2}{(1-\rho)}$

2. Bei konstanter Servicezeit gilt: $\sigma^2 = 0$ => $Lq = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}$

3. Hieraus folgt, dass die durchschnittliche Länge der Warteschlange (L_q) jeweils zur Hälfte durch die Varianz der Ankünfte sowie die Varianz der Servicezeit erklärt wird.

Standard-M/M/s-Modell

- Voraussetzungen:
  - Wie bei Standard M/M/1-Modell (u.a. eine unbegrenzte Warteschlange und FCFS)
  - Servicerate der Server ist unabhängig und identisch verteilt

mms.xls M/M/s Queueing Formula Spreadsheet

Inputs:

lambda	80
mu	120

Definitions of terms:
lambda = arrival rate
mu = service rate
s = number of servers
Lq = average number in the queue
Ls = average number in the system
Wq = average wait in the queue
Ws = average wait in the system
P(0) = probability of zero customers in the system
P(delay) = probability that an arriving customer has to wait

Outputs:

s	Lq	Ls	Wq	Ws	P(0)	P(delay)	Utilization
0							
1	1,3333	2,0000	0,0167	0,0250	0,3333	0,6667	0,6667
2	0,0833	0,7500	0,0010	0,0094	0,5000	0,1667	0,3333
3	0,0093	0,6760	0,0001	0,0084	0,5122	0,0325	0,2222
4	0,0010	0,6677	0,0000	0,0083	0,5133	0,0051	0,1667
5	0,0001	0,6668	0,0000	0,0083	0,5134	0,0007	0,1333
6	0,0000	0,6667	0,0000	0,0083	0,5134	0,0001	0,1111
7	0,0000	0,6667	0,0000	0,0083	0,5134	0,0000	0,0952
8	0,0000	0,6667	0,0000	0,0083	0,5134	0,0000	0,0833
9	0,0000	0,6667	0,0000	0,0083	0,5134	0,0000	0,0741
10	0,0000	0,6667	0,0000	0,0083	0,5134	0,0000	0,0667

Beispiel: Fahrkartenautomat

- Pro Stunde kommen durchschnittlich 20 Kunden
- Servicemanager hat die Wahl zwischen
  - Einem modernen Hochleistungsautomat (bedient durchschnittlich 2 Kunden pro Minute)
  - Zwei alten Automaten (bedienen jeweils durchschnittlich 1 Kunden pro Minute)

Fahrkartenbeispiel: 1 Hochleistungsautomat

mms.xls M/M/s Queueing Formula Spreadsheet

Inputs:

lambda	20
mu	120

Definitions of terms:

lambda = arrival rate
mu = service rate
s = number of servers
Lq = average number in the queue
Ls = average number in the system
Wq = average wait in the queue
Ws = average wait in the system
P(0) = probability of zero customers in the system
P(delay) = probability that an arriving customer has to wait

Outputs:

s	Lq	Ls	Wq	Ws	P(0)	P(delay)	Utilization
0							
1	0,0333	0,2000	0,0017	0,0100	0,8333	0,1667	0,1667
2	0,0012	0,1678	0,0001	0,0084	0,8462	0,0128	0,0833

Fahrkartenbeispiel: 2 Altautomaten

mms.xls M/M/s Queueing Formula Spreadsheet

Inputs:

lambda	20
mu	60

Definitions of terms:

lambda = arrival rate
mu = service rate
s = number of servers
Lq = average number in the queue
Ls = average number in the system
Wq = average wait in the queue
Ws = average wait in the system
P(0) = probability of zero customers in the system
P(delay) = probability that an arriving customer has to wait

Outputs:

s	Lq	Ls	Wq	Ws	P(0)	P(delay)	Utilization
0							
1	0,1667	0,5000	0,0083	0,0250	0,6667	0,3333	0,3333
2	0,0095	0,3429	0,0005	0,0171	0,7143	0,0476	0,1667
3	0,0006	0,3340	0,0000	0,0167	0,7164	0,0050	0,1111

Trade-offs

- **2 Altautomaten**
  Lq = 0.0095
  Ls = 0.3429
  Wq = 0.0005
  Ws = 0.0171
  P(0) = 71%
  P(Delay) = 4.8%
  Auslastungsgrad = 16.7%
- **1 Hochleistungsautomat**
  Lq = 0.0333
  Ls = 0.2
  Wq = 0.0017
  Ws = 0.01
  P(0) = 83%
  P(Delay) = 16.7%
  Auslastungsgrad = 16.7%

Server-Pooling

- Prinzip: Eine statt mehrere Warteschlangen
- Bessere Auslastung der Server
- Beispiele: Postschalter, Sekretärinnenpool
- Nachteil: „Lange" Warteschlange schreckt evtl. Kunden ab
- Trade off zwischen Transport- und Wartekosten bei Pooling über mehrere Standorte (1 zentraler Serverpool vs. mehrere dezentrale Server)

M/M/s-Modell mit begrenzter Warteschlange

– Analog zu M/M/1-Modell mit begrenzter Warteschlange

– N = Maximale Kundenzahl im System > s

– Neu ankommender Kunde wird zurückgewiesen, wenn mehr als N-s Kunden warten oder mehr als N Kunden im System sind

– Sonderfall: N - s = 0 (Keine Wartemöglichkeit)

– Beispiel: Parkplatz (jeder Parkplatz ist ein Server)

M/G/∞-Modell

- Bei diesem Modell muss kein Kunde warten, da es unendliche viele Server gibt
- Beispiel: Selbstbedienung
- Die Anzahl der Kunden im System ist poissonverteilt gemäß

$$P_n = \frac{e^{-\rho}}{n!} \rho^n$$

- Es gilt

$$Ls = \rho$$