

# OPERATIONS MANAGEMENT



## - Kurzfristige Kapazitätsplanung -



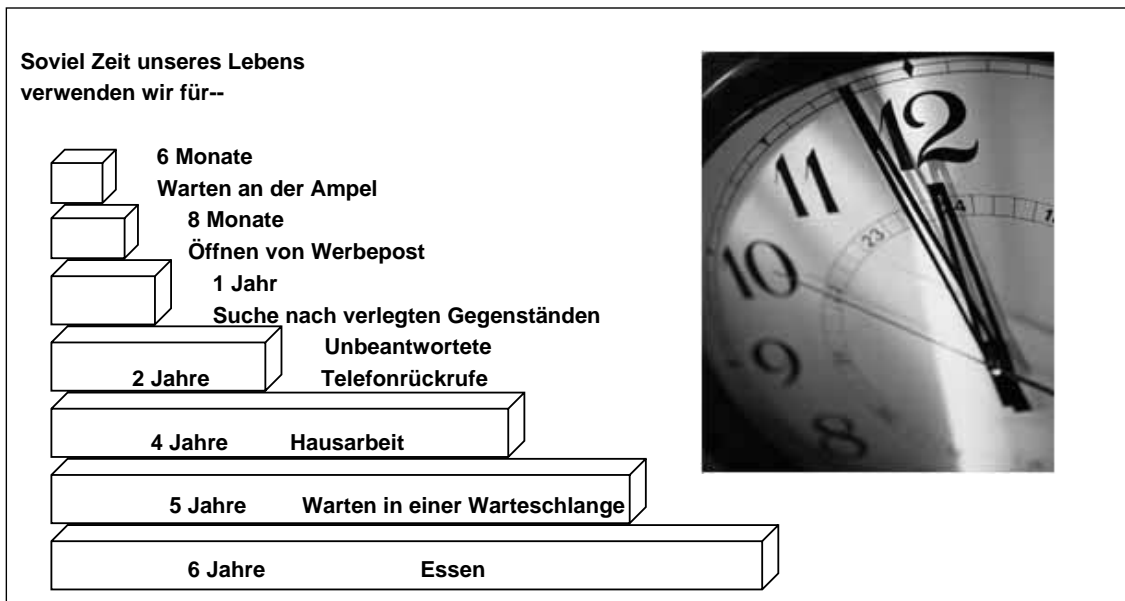
## Lernziele

Nach dieser Veranstaltung sollten Sie wissen,

- welcher Trade-off zwischen Warte- und Servicekosten besteht
- wovon das subjektive Wartezeitempfinden abhängt und wie es sich beeinflussen lässt
- aus welchen Grundelementen ein Warteschlangensystem besteht
- inwieweit poissonverteilte Ankunftsdaten dem exponentiellverteilten Zeitabstand zwischen 2 Ankünften entsprechen
- wie man die wichtigsten Warteschlangenmodelle anwendet
- wie die wichtigsten Performancekriterien von Warteschlangensystemen berechnet werden können
- inwiefern Kapazitätsentscheidungen auf der Basis von Warteschlangenmodellen getroffen werden können



# Wie zerrinnt unsere Zeit?



Quelle: U.S. News & World Report, 30.1.1989, S. 81



Helmut M. Dietl

3

## Wartephänomene

- **Unausweichlichkeit:** Wartezeit ist das unausweichliche Ergebnis unterschiedlicher Veränderungen bei der Ankunftsrate und der Servicerate
- **Warteökonomik:** Hohe Serverauslastung kann nur durch Wartezeiten der Kunden erkaufte werden => Trade off zwischen Auslastung und Wartezeit
  - Auswege:
    - Produktive Wartezeit (Salatbuffet)
    - Profitable Wartezeit (Empfangsbar)



Helmut M. Dietl

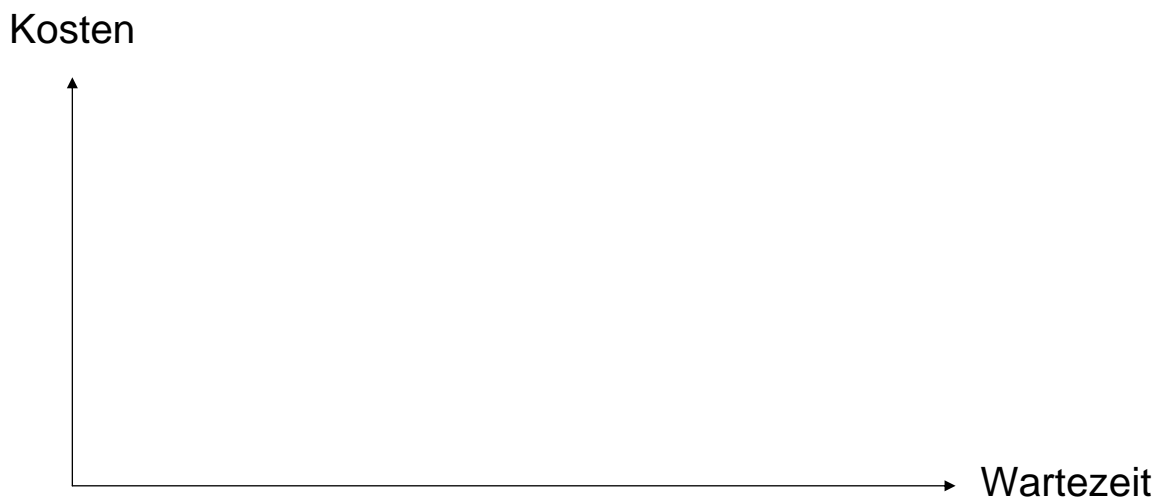
4

# 2 Komponenten des Warteschlangenmanagements

- Tatsächliche Wartezeit
  - Objektiv
  - Messbar
  - Warteschlangenmodelle
- Empfundene Wartezeit
  - Subjektiv
  - Nicht messbar
  - Psychologische Studien
- Beispiel:
  - Verringerung der tatsächlichen Wartezeit durch zusätzlichen Hotelaufzug
- Beispiel:
  - Verringerung der empfundenen Wartezeit durch Spiegel vor den Hotelaufzügen

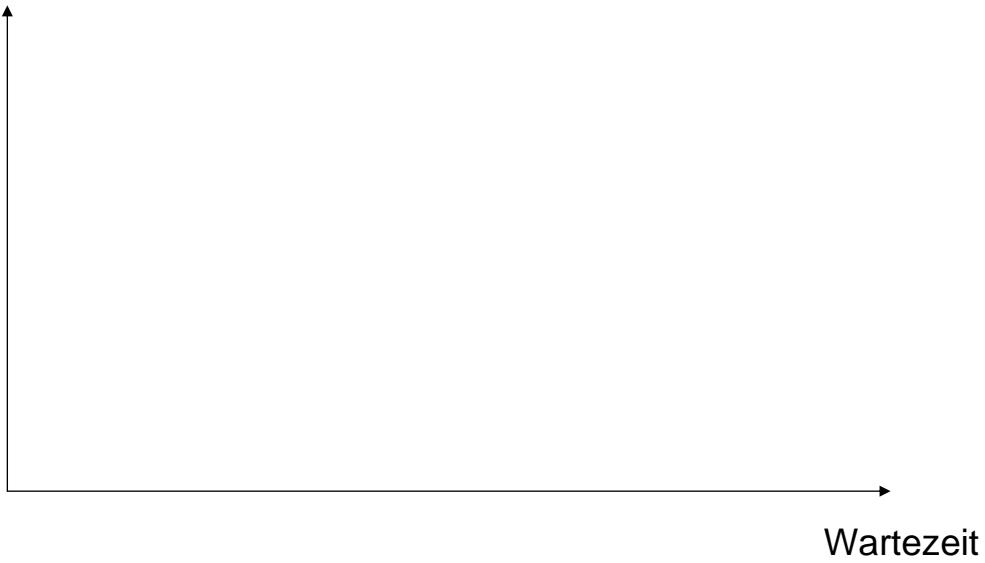


## Trade-off im Warteschlangenmanagement



# Trade-off-Optimierung

Grenznachteil  
Grenzvorteil

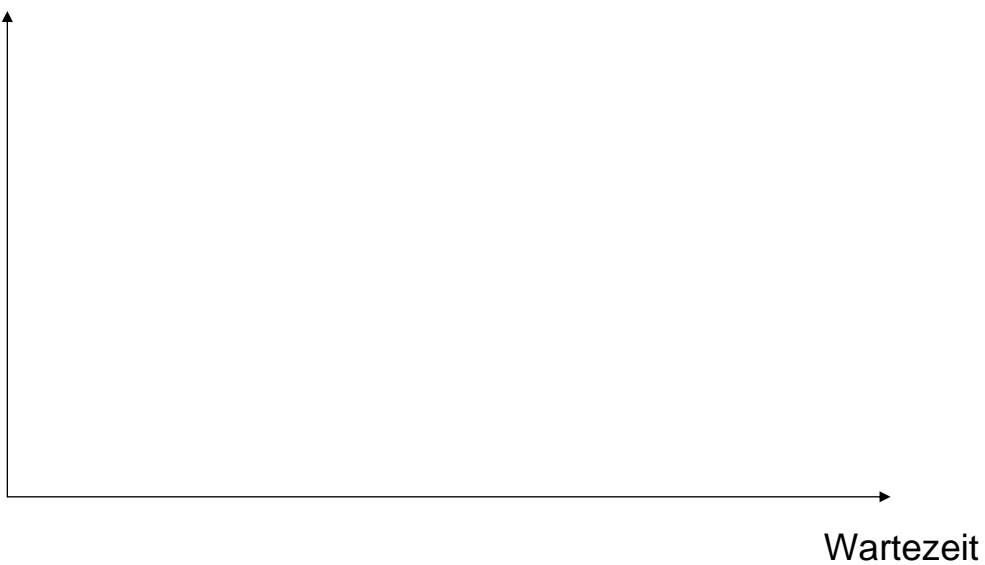


Helmut M. Dietl

7

# Trade-off und Opportunitätskosten

Grenznachteil  
Grenzvorteil



Helmut M. Dietl

8

# Warteschlangenpsychologie

<i>Subjektives Zeitempfinden länger</i>	<i>Subjektives Zeitempfinden kürzer</i>
Warten ohne Ablenkung/Beschäftigung	Warten mit Ablenkung/Beschäftigung
Unerwartete Wartezeit	Geplante Wartezeit
Allein warten	In der Gruppe warten
Wartezeit außerhalb des Serviceprozesses	Wartezeit innerhalb des Serviceprozesses
Besorgtes Warten	Entspanntes Warten

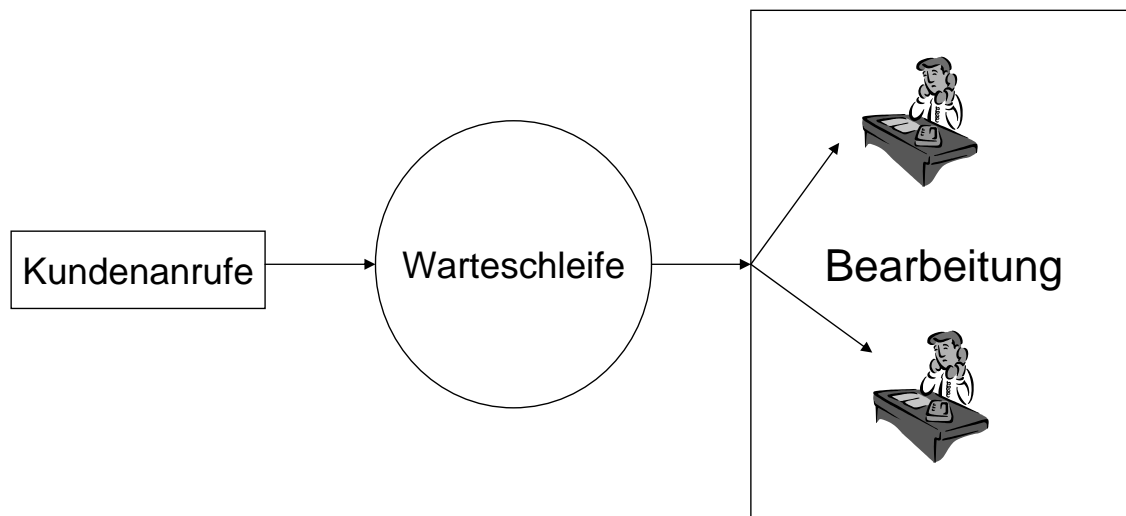


## Verringerung der empfundenen Wartezeit

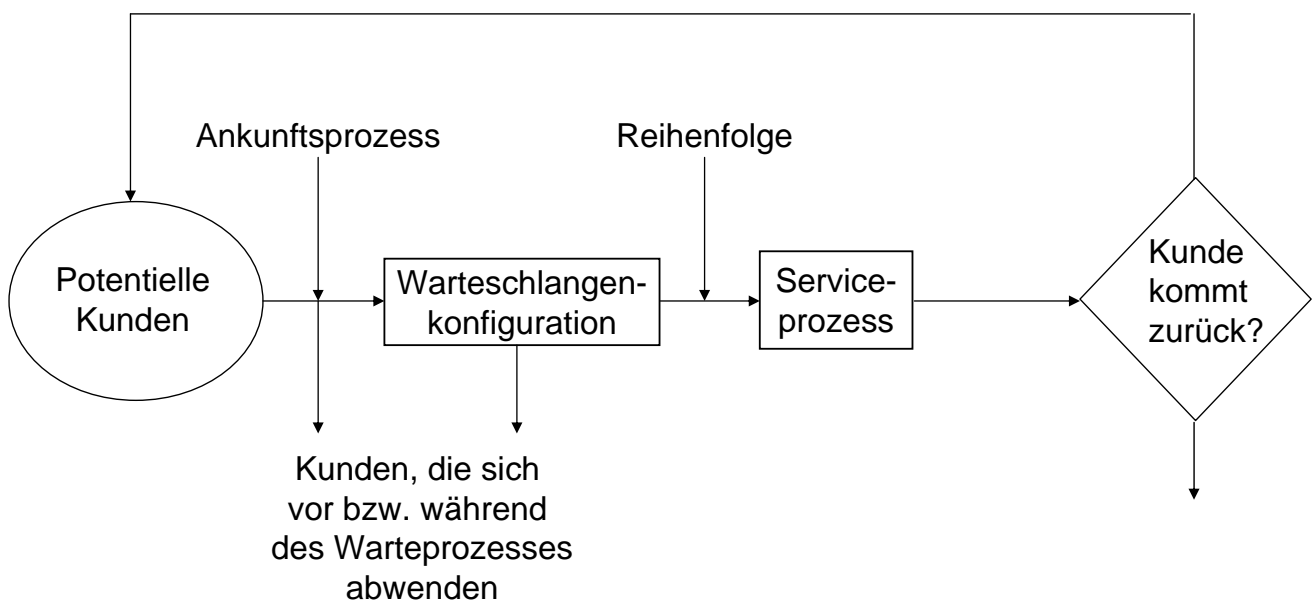
- Gerechte vs. ungerechte Wartezeiten
  - Nummern- und Einschlangensystem (aber: Supermarkt), keine Telefonanrufe!
- Bequeme vs. unbequeme Wartezeiten
  - Empfangsbar in Restaurants, Bestuhlung, Unterhaltung
- Erklärte vs. unerklärte (besorgniserregende) Wartezeit
  - Abflugverzögerung wegen Enteisierung der Tragflächen
- Beschäftigtes vs. beschäftigungsloses Warten
  - Wartelounge mit Fax- und Internetanschluss
- Wartezeiten außerhalb vs. innerhalb des Systems
  - Vorprogramm im Kino



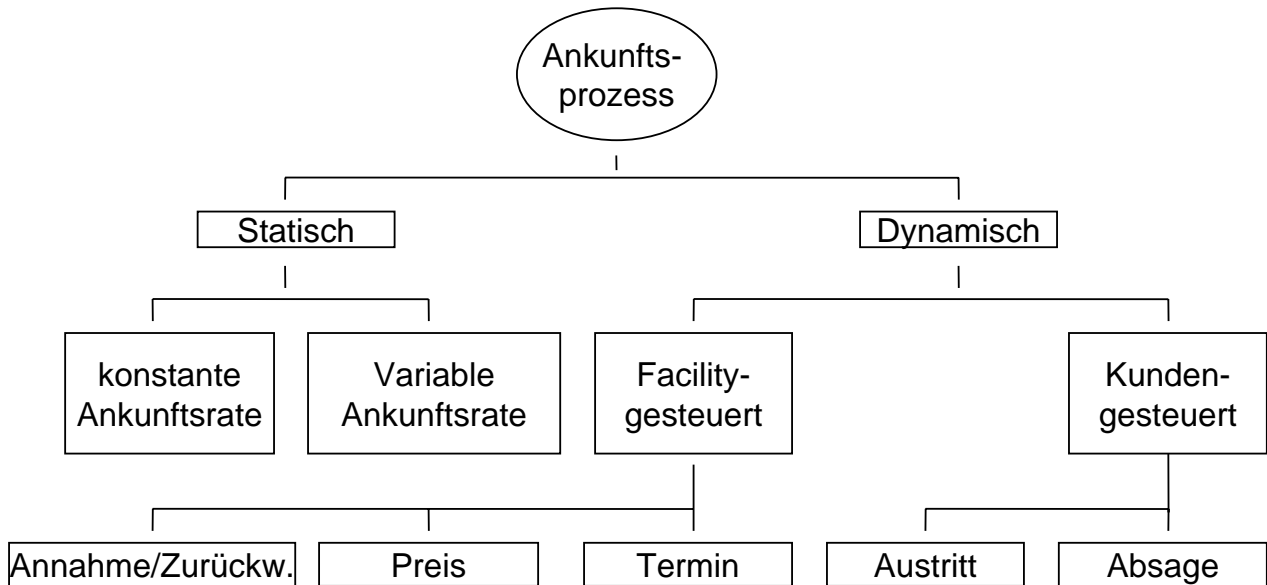
# Warteschlangensysteme



## Grundelemente von Warteschlangensystemen



# Ankunftsprozess



## Exponentialverteilung (stetig)

Dichtefunktion:  $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$   $t \geq 0$

$\lambda$  = durchschnittliche Ankunftsrate pro Zeiteinheit (z.B. Minuten, Stunden, Tage)  
 $t$  = Zeitabstand zwischen 2 Ankünften  
 $e = 2.718...$

Verteilungsfunktion:  $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$   $t \geq 0$

Mittelwert:

Varianz:



# Poissonverteilung (diskret)

Dichtefunktion:  $f(n) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$   $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

$\lambda$  = durchschnittliche Ankunftsrate pro Zeiteinheit (z.B. Minuten, Stunden, Tage)  
 $t$  = Anzahl der Zeitperioden (i.d.R. 1)  
 $n$  = Anzahl der Ankünfte (0, 1, 2, ...)  
 $e = 2.718\dots$

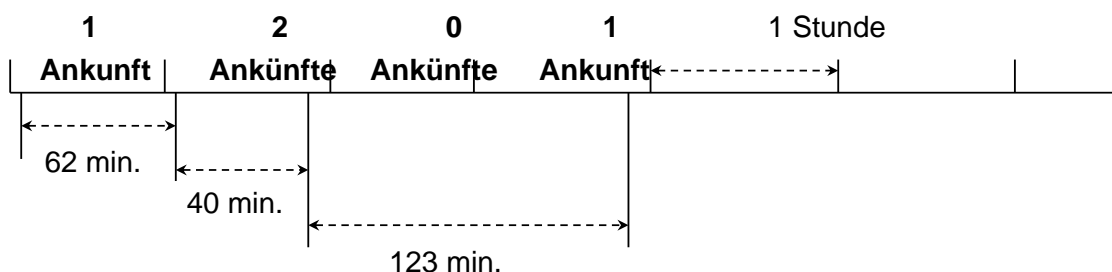
Mittelwert:

Varianz:



## Äquivalenz zwischen Poisson- und Exponentialverteilung

Poissonverteilung für die Anzahl der Ankünfte pro Stunde (oben)



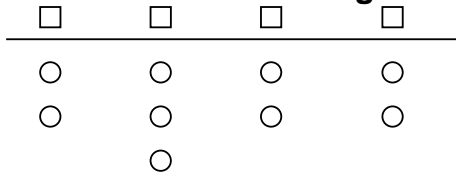
Exponentialverteilung der Zeitabstände zwischen 2 Ankünften in Minuten (unten)



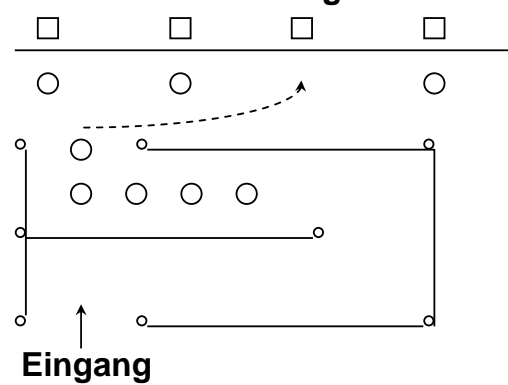


# Warteschlangenkonfiguration

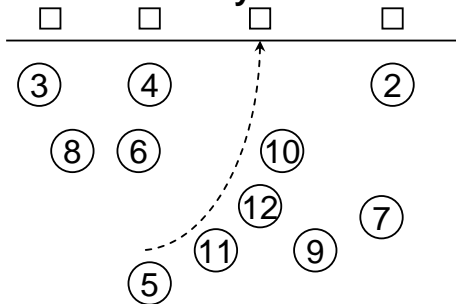
## Mehrere Warteschlangen



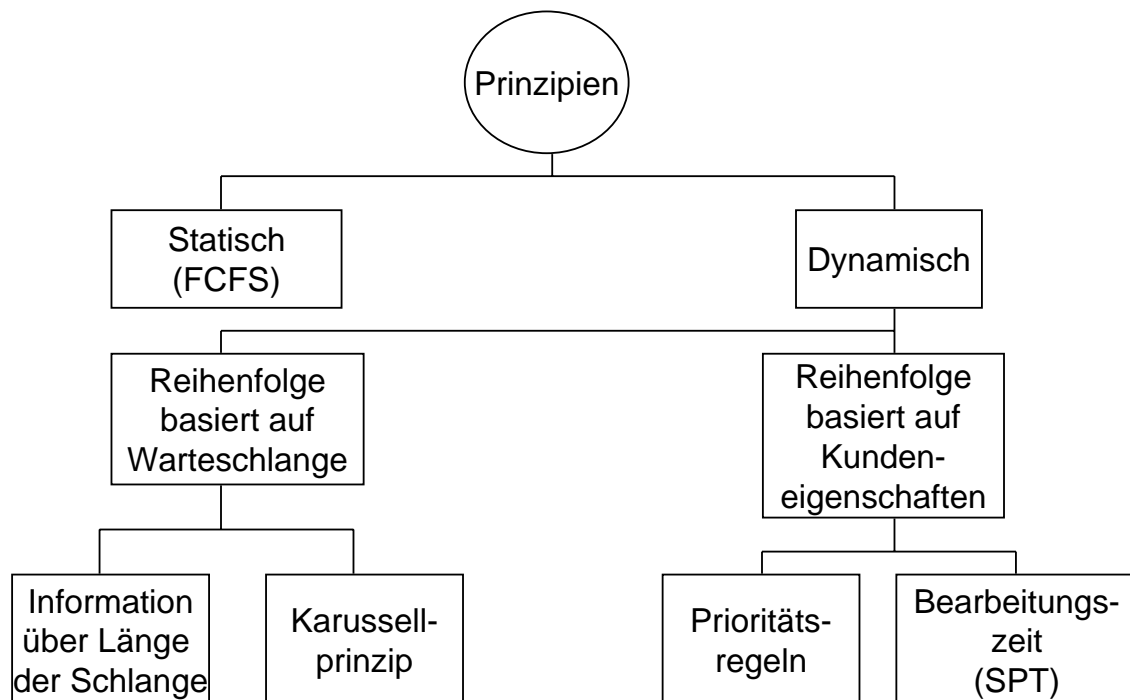
## Eine Warteschlange



## Nummernsystem



# Reihenfolge

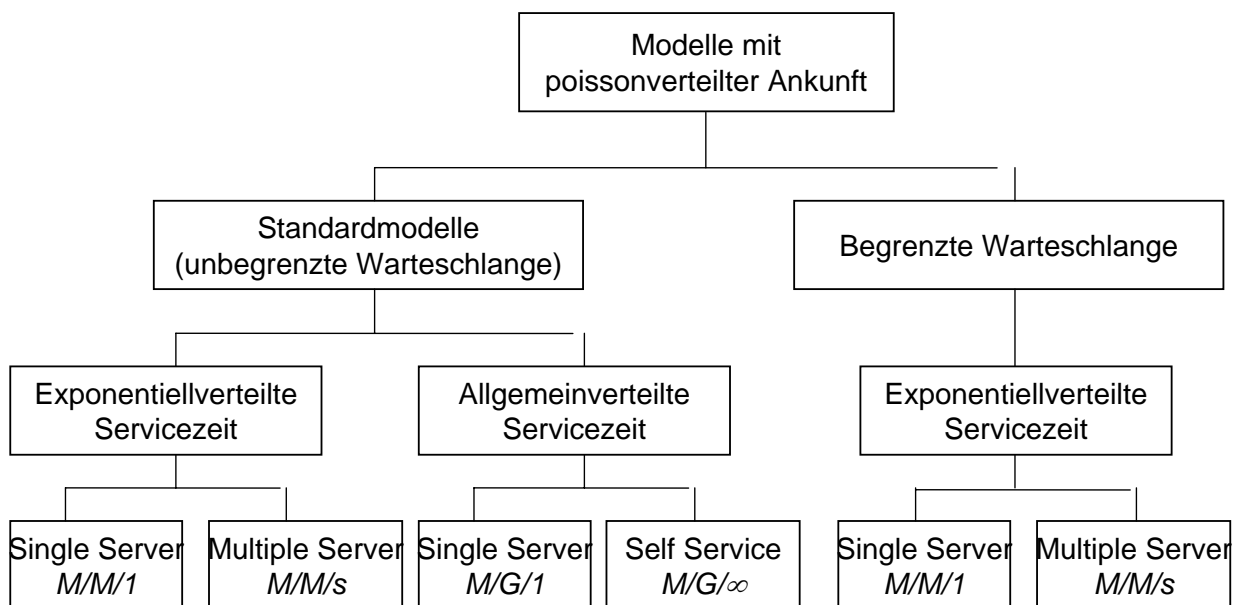


# Serveranordnung

<i>Servicefacility</i>	<i>Serveranordnung</i>
Parkplatz	Selbstbedienung
Cafeteria	Server hintereinander
Mautstelle	Server parallel
Supermarkt	Selbstbedienung (1. Stufe); Parallel-Server (2.Stufe)
Krankenhaus	Viele Servicecenter (parallel und hintereinander)



## Warteschlangenmodelle im Überblick



**A/B/C Notation:** *A* beschreibt die Verteilung der Zeitabstände zwischen 2 Ankünften, *B* beschreibt die Verteilung der Servicezeit und *s* (oder *c*) die Anzahl der Server. *M* beschreibt die Exponentialverteilung, *G* irgendeine allgemeine Verteilung (z.B. Normalverteilung, Gleichverteilung, etc.)



# Standard M/M/1-Modell

- Voraussetzungen:
  - Unbegrenzte oder sehr große Menge potentieller Kunden
  - Zeitabstände zwischen 2 Ankünften sind negativ exponentialverteilt bzw. Ankunftsrate ist poissonverteilt
  - Eine unbegrenzte Warteschlange ohne Abwanderung von Kunden
  - FCFS
  - Ein Server mit negativ exponentiell verteilter Servicezeit bzw. poissonverteilter Servicerate
  - $\lambda < \mu$



## M/M/1

Poissonverteilte Ankunfts- und Servicerate ( $\lambda < \mu$ )

Durchschnittliche Ankunftsrate:  $\lambda$

Durchschnittliche Servicerate:  $\mu$

Durchschnittlicher Auslastungsgrad:

Wahrscheinlichkeit, dass sich genau n Kunden im System befinden:

Wahrscheinlichkeit, dass sich k oder mehr Kunden im System befinden:



# M/M/1

Durchschnittliche Anzahl von Kunden im System:  $L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$

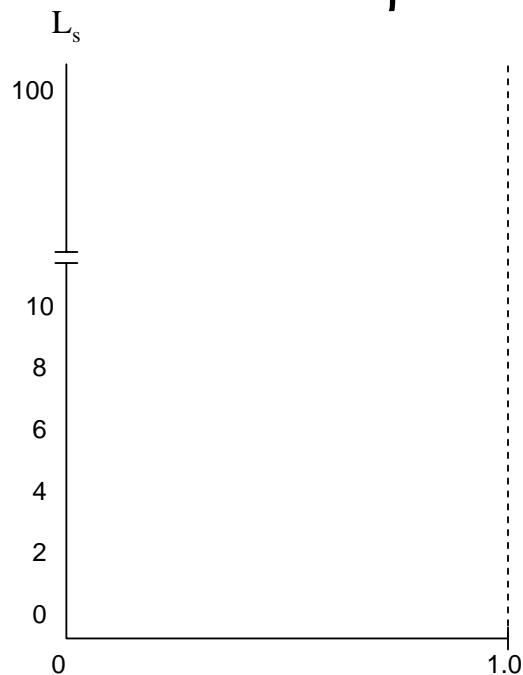
Durchschnittliche Länge der Warteschlange:  $L_q = \frac{\rho\lambda}{\mu - \lambda}$

Durchschnittliche Verweildauer im System:  $W_s = \frac{1}{\mu - \lambda}$

Durchschnittliche Verweildauer in der Warteschlange:  $W_q = \frac{\rho}{\mu - \lambda}$



Wie ändert sich die Länge der Warteschlange,  
wenn  $\rho \rightarrow 0$ ?



$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$
$$L_s = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

$\rho$	$L_s$
0	0
0.2	0.25
0.5	1
0.8	4
0.9	9
0.99	99



# Beispiel 1: Eisverkäufer

- Pro Stunde kommen durchschnittlich 80 Kunden.
- Der Verkäufer benötigt je Kunde durchschnittlich 30 Sekunden.
- Ankunftsrate der Kunden ist poissonverteilt.
- Servicerate ist poissonverteilt.



## Fragen zum Eisverkäufer-Beispiel

1. Wie hoch ist der durchschnittliche Auslastungsgrad des Eisverkäufers?
2. Wie lang ist die durchschnittliche Warteschlange vor dem Eisverkäufer?
3. Wie viele Kunden befinden sich durchschnittlich im „System“ (Warteschlange + Bedienung)?
4. Wie lange verweilt ein Kunde durchschnittlich in der Warteschlange (durchschnittliche Wartezeit)?
5. Wie lange verweilt ein Kunde durchschnittlich im „System“ (durchschnittliche Verweilzeit)?



# Eisverkäufer-Beispiel

## 1. Durchschnittlicher Auslastungsgrad des Eisverkäufers

$$\lambda = 80 \text{ Kunden/Stunde}$$

$$\mu = \frac{1 \text{ Kunde}}{30 \text{ Sekunden} \left( \frac{1 \text{ Stunde}}{3600 \text{ Sekunden}} \right)} = 120 \text{ Kunden / Stunde}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{80 \text{ Kunden/Stunde}}{120 \text{ Kunden/Stunde}} = 0,67 = 67\%$$



# Eisverkäufer-Beispiel

## 2. Durchschnittliche Länge der Warteschlange

$$Lq = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} =$$

## 3. Durchschnittliche Anzahl der Kunden im System

$$Ls = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} =$$



# Eisverkäufer-Beispiel

## 4. Durchschnittliche Wartezeit

$$Wq = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} =$$

## 5. Durchschnittliche Verweilzeit

$$Ws = \frac{1}{\mu - \lambda} =$$

