Universität Zürich[UZH]

Institut für Betriebswirtschaftslehre

Operations Management

Supply Chain Management und Lagerhaltungsmanagement

Prof. Dr. Helmut Dietl

Lernziele

Nach dieser Veranstaltung sollen Sie

- die Gründe für Lagerhaltung verstehen
- die grundsätzlichen Trade-offs des Lagerhaltungsmanagements kennen
- die Economic Order Quantity (optimale Bestellmenge) bei deterministischer Nachfrage berechnen können
- wissen, wie Rabatte die Economic Order Quantity beeinflussen
- den optimalen Bestellpunkt bestimmen können
- das Zeitungsjungenproblem verstehen und die optimale Bestellmenge bei stochastischer Nachfrage bestimmen können

Wie organisieren Sie Ihren Lagerbestand zu Hause?

- Beispiele für persönliche Lagerbestände
  - Milch
  - Obst
  - Getränke
  - Zahnpasta
  - Benzin
  - …
- Wann kaufen Sie nach?
- Wie viel kaufen Sie?
- Warum kaufen Sie manche Dinge öfter und in kleineren Mengen?

Welche Aspekte berücksichtigen Sie?

- Kosten des fehlenden Bestands
- Kosten des Einkaufens
  - Zeit
  - Geld
- Lagerkosten
- Preisnachlässe
- Durchschnittlicher Verbrauch
- Sicherheitsreserve
- …

Gründe für Lagerhaltung

- Skaleneffekte bei Bestellvorgängen nutzen
- Mengenrabatte bei Bestellungen nutzen
- Absicherung gegen Preisanstiege (Inflation)
- Ermöglichung schneller Reaktion auf Kundenanfragen
- Absicherung gegen Fehlmengen
- Höhere Autonomie gegenüber Lieferanten
- Entkopplung aufeinanderfolgender Wertschöpfungs- /Produktionsstufen

Kosten der Lagerhaltung

- Physische Lagerkosten
  - Laufende Kosten für Lagerhaltung (Versicherung, Sicherheit, Miete, Kühlung)
  - Sämtliche Kosten, welche vor dem Verkauf entstehen (Alterung, Verderb, Wiederaufbereitung…)
- Opportunitätskosten des Lagers: entgangene Rendite des gebundenen Kapitals
- Betriebskosten
  - Verzögerung bei der Feststellung von Qualitätsproblemen
  - Verzögerung bei der Einführung neuer Produkte
  - Erhöhte Durchlaufzeiten

Beispiele (2021)

ABB

- Vorräte: 4‘880 (Mio. $)
- Umsätze: 28‘945 (Mio. $)
- Aktiva: 40‘260 (Mio. $)

% Anteile:
- Umsatz 16.9%
- Gesamtvermögen 12.1%

NOVARTIS

- Vorräte: 6‘666 (Mio. $)
- Umsätze: 51‘626 (Mio. $)
- Aktiva: 131‘795 (Mio. $)

% Anteile:
- Umsatz 12.9%
- Gesamtvermögen 5.1%

Mercedes-Benz

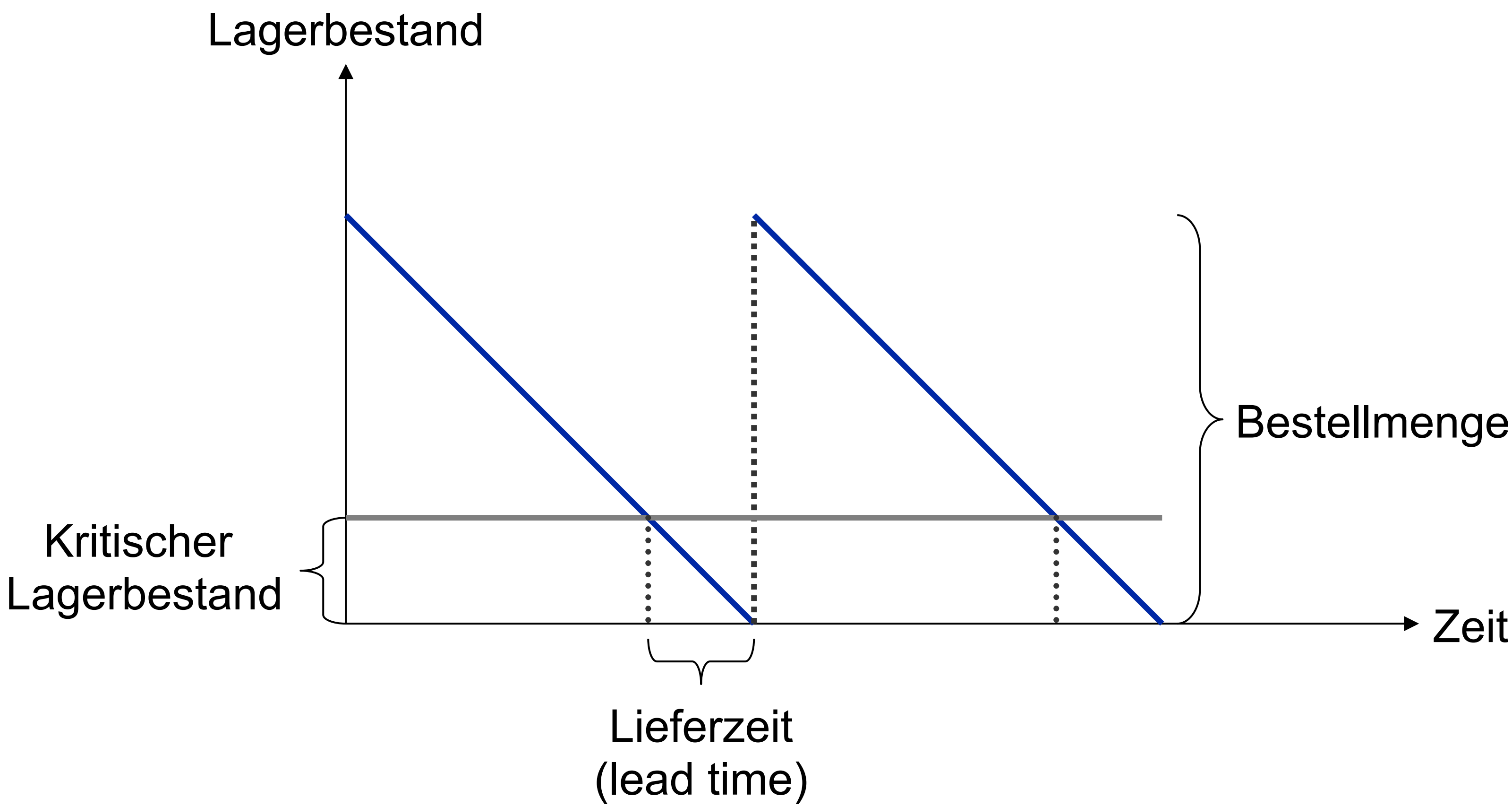
- Vorräte: 21‘466 (Mio. €)
- Umsätze: 133’893 (Mio. €)
- Aktiva: 250‘751 (Mio. €)

% Anteile:
- Umsatz 16.0%
- Gesamtvermögen 8.6%

Economic Order Quantity: Annahmen

- Kontinuierlicher Bedarfsverlauf (deterministisch)
- Keine Fehlmengen
- Konstante Lieferzeiten (Zeitraum von Bestellung bis Lieferung: lead time)
- Konstanter Produktpreis (zeit- und mengenunabhängig)
- Unbegrenzte Lagerkapazität
- Konstante Lagerkosten (zeit- und mengenunabhängig)

Economic Order Quantity: Lagerbestand im Zeitverlauf



Economic Order Quantity: Kostenfunktion (1/2)

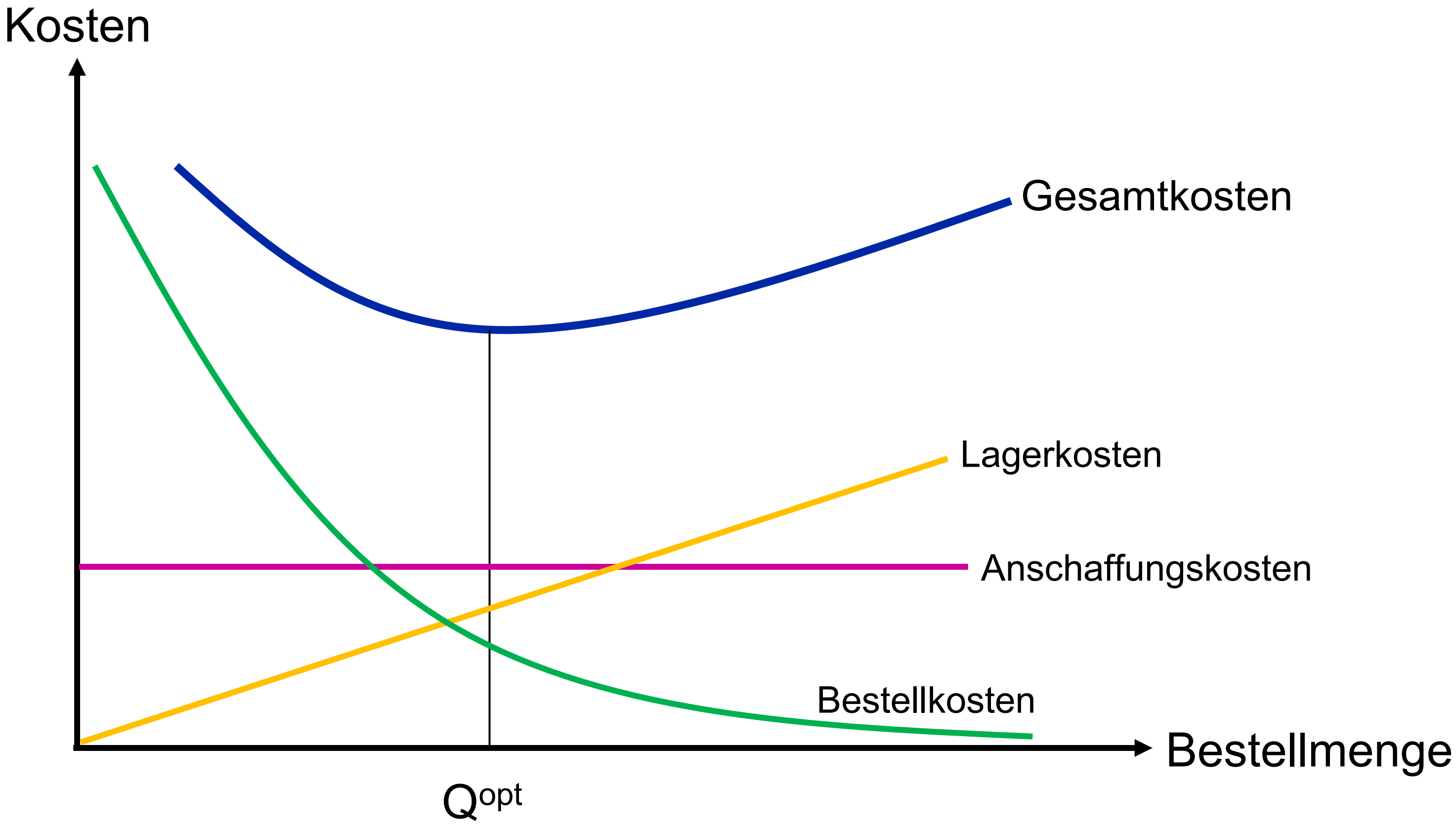
Gesamtkosten = Anschaffungskosten + Bestellkosten + Lagerkosten

Anschaffungskosten = Gesamtbedarf * Preis pro Einheit

Bestellkosten = Anzahl Bestellungen * Bestellfixkosten

Lagerkosten = Durchschnittlicher Lagerbestand * (Zins- und Lagerkostensatz)

Economic Order Quantity: Kostenfunktion (2/2)



Economic Order Quantity: Notation

- Q = Bestellmenge
- K = Gesamtkosten
- M = Gesamtbedarf
- p = Preis pro Einheit (konstant)
- a = Bestellfixkosten
- c = Zins- und Lagerkostensatz (je Einheit)

$$K = pM + \frac{M}{Q}a + \frac{Q}{2}c$$

Ermittlung der Economic Order Quantity

1. Ableitung der Gesamtkosten *K* nach der Bestellmenge *Q* bilden

$$\frac{\partial K}{\partial Q} = -\frac{M}{Q^2}a + \frac{c}{2}$$

2. Ableitung Nullsetzen

$$-\frac{M}{Q^2}a + \frac{c}{2} = 0$$

3. Gleichung nach der optimalen Bestellmenge Q^* *auflösen*

$$Q^* = \sqrt{\frac{2Ma}{c}}$$

Economic Order Quantity

Die optimale Bestellmenge $Q^{*} = \sqrt{\frac{2Ma}{c}}$ steigt ceteris paribus,

- wenn der Gesamtbedarf *M steigt*
- wenn die Bestellfixkosten *a* steigen

Die optimale Bestellmenge $Q^{*} = \sqrt{\frac{2Ma}{c}}$ sinkt ceteris paribus,

- wenn der Zins- und Lagerkostensatz *c* steigt

Beispiel 1a) und b): Economic Order Quantity

Die Administration der UZH bestellt Papier zum Preis von CHF 10.- pro Box. Die UZH hat einen Bedarf von 300 Boxen Papier pro Monat. Es fallen pro Bestellung fixe Kosten von CHF 30 an. Das Papierlager verursacht pro Box jährliche Zins- und Lagerkosten von 40% des Warenpreises (1 Jahr = 365 Tage). Die Lieferfrist beträgt 3 Tage.

a) Berechnen Sie die optimale Bestellmenge und die dabei entstehenden jährlichen Kosten für die UZH.

b) Zeigen Sie ausserdem, wie sich die optimale Bestellmenge ändert, wenn sich der jährliche Zins- und Lagerkostensatz verändert.

Beispiel 1a): Lösung

Die folgenden Variablen sind gegeben:

Preis:	p = CHF 10 pro Box
Gesamtbedarf:	M = 12 Monate/Jahr * 300 Boxen/Monat
	M = 3'600 Boxen/Jahr
Bestellfixkosten:	a = CHF 30
Zins- und Lagerkostensatz:	c = 40% p.a. * 10 CHF/Box p.a.
	c = 4 CHF/Box p.a.
Lieferzeit:	L = 3 Tage

$$Q^* = \sqrt{\frac{2Ma}{c}} = \sqrt{\frac{2 * 3600 * 30}{4}} = 232.38 \Rightarrow 233\ Boxen$$

$$\text{Gesamtkosten} = pM + \frac{M}{Q^*}a + \frac{Q^*}{2}c = 10 * 3600 + \frac{3600}{233} * 30 + \frac{233}{2} * 4 = CHF\ 36'929.52$$

Beispiel 1b): Lösung

Um den Effekt einer Änderung der Zins- und Lagerkosten auf die optimale Bestellmenge zu bestimmen, wird die partielle Ableitung der Bestellmenge (Q) nach dem Zins- und Lagerkostensatz (c) gebildet:

$$\frac{\partial Q^*}{\partial \mathrm{c}} = \frac{\partial \sqrt{\frac{2\mathrm{Ma}}{c}}}{\partial c} = \frac{\partial c^{-\frac{1}{2}}}{\partial c} * \sqrt{2Ma} = -\frac{1}{2} * c^{-\frac{3}{2}} * \sqrt{2Ma} < 0$$

➔ Steigende (Fallende) Zins- und Lagerkosten wirken sich negativ (positiv) auf die optimale Bestellmenge aus.

Bestellpunktverfahren

Bestellpunktverfahren:

Anhand von Lieferzeit und durchschnittlicher Tagesnachfrage wird der Zeitpunkt bestimmt, an dem eine Bestellung aufgegeben werden muss.

- Bestellpunkt: R
- (Durchschnittliche) Tagesnachfrage: T
- Lieferzeit: L
- Sicherheitsbestand: SB

Ohne Sicherheitsbestand: $R = T * L$

Mit Sicherheitsbestand: $R = T * L + SB$

Beispiel 1c) und d): Bestellpunkt

Angaben wie in 1a) & b):

c) Berechnen Sie den optimalen Bestellpunkt ohne Sicherheitsbestand.

d) Berechnen Sie den optimalen Bestellpunkt mit einem Sicherheitsbestand von 10 Boxen.

Beispiel 1c) und d): Lösung

c) $$R = T * L = \frac{3600}{365} * 3 = 29.59 \Rightarrow 30\ Boxen$$

d) $$R = T * L + SB = \frac{3600}{365} * 3 + 10 = 39.59 \Rightarrow 40\ Boxen$$

➔ Sobald der Lagerbestand auf 30 Boxen (ohne SB) bzw. 40 Boxen (mit SB) absinkt, sollten 233 Boxen nachbestellt werden.

Optimale Bestellmenge mit Rabatten (1/2)

Im Falle von Rabatten ist der Preis eine Variable der Bestellmenge. In diesem Fall wird das Problem wie folgt gelöst:

1. Berechnung der optimalen Bestellmenge für den niedrigsten Preis (d.h. höchster Rabatt). Wenn die optimale Bestellmenge gross genug ist, um diesen höchsten Rabatt zu erhalten, ist das Problem gelöst.

2. Wenn die optimale Bestellmenge kleiner als die erforderliche Menge ist, um den höchsten Rabatt zu erhalten, wird mit dem zweitniedrigsten Preis fortgefahren (d.h. dem zweihöchsten Rabatt)

3. Wenn die optimale Bestellmenge gross genug ist, um den zweithöchsten Rabatt zu erhalten, werden die Gesamtkosten dieser Lösung mit der Randlösung des höchsten Rabatts verglichen und die bessere Lösung gewählt.

Optimale Bestellmenge mit Rabatten (2/2)

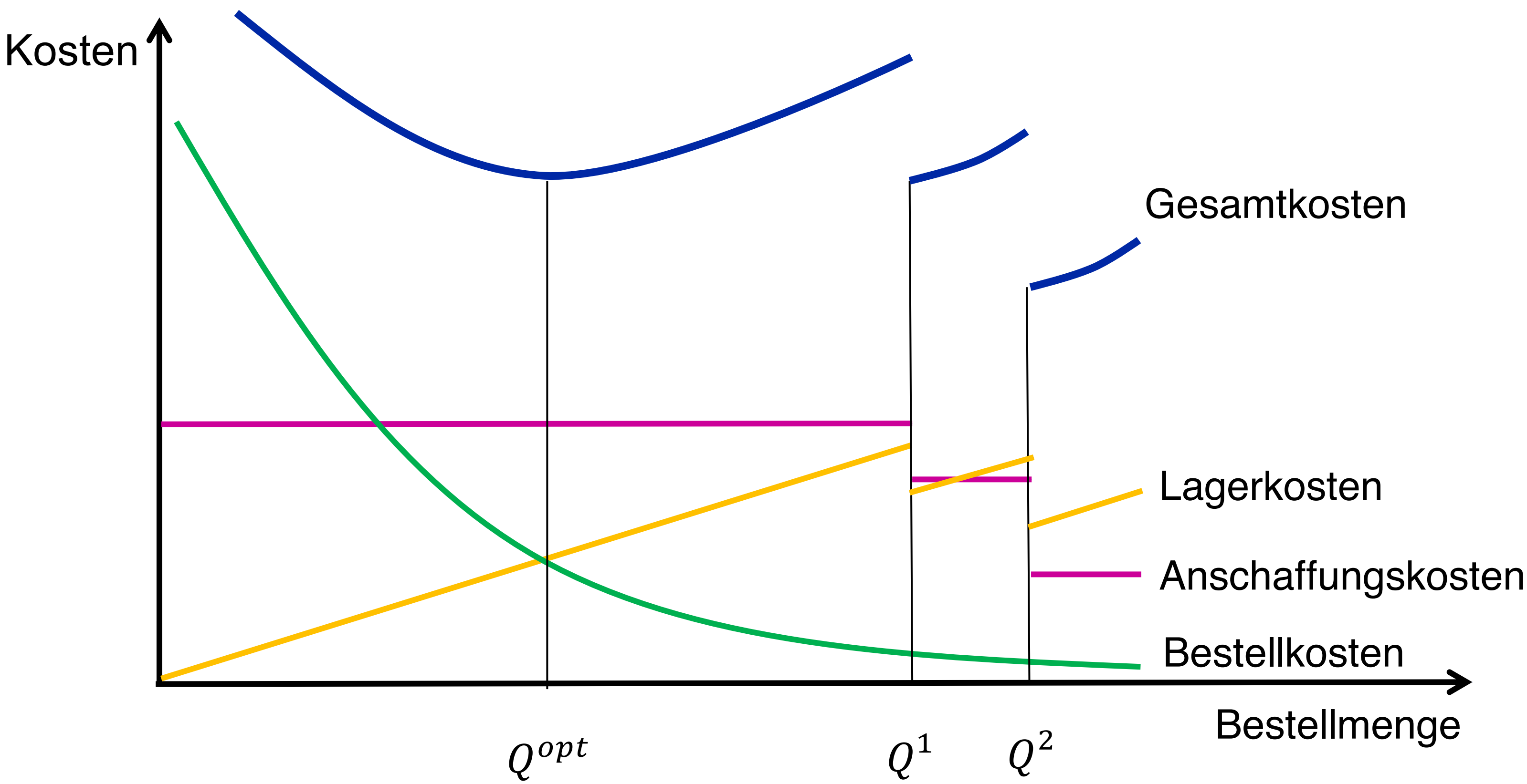
4. Wenn die optimale Bestellmenge kleiner als die erforderliche Menge ist, um den zweithöchsten Rabatt zu erhalten, wird mit dem drittniedrigsten Preis fortgefahren (d.h. dem dritthöchsten Rabatt)

5. Wenn die optimale Bestellmenge gross genug ist, um den dritthöchsten Rabatt zu erhalten, werden die Gesamtkosten dieser Lösung mit der Randlösung des zweithöchsten Rabatts verglichen und die bessere Lösung gewählt.

6. Wenn die optimale Bestellmenge kleiner als die erforderliche Menge ist, um den dritthöchsten Rabatt zu erhalten, wird mit dem viertniedrigsten Preis fortgefahren (d.h. dem vierthöchsten Rabatt)

7. …

Optimale Bestellmenge mit Rabatten



Beispiel 1e): Rabatte

Angaben wie in 1a) – 1d):

e) Berechnen Sie die optimale Bestellmengen mit den folgenden Rabatten:

Bei Bestellmengen ab 100 Boxen, sinkt der Preis auf CHF 9 pro Box

Bei Bestellmengen ab 200 Boxen, sinkt der Preis auf CHF 8 pro Box

Bei Bestellmengen ab 300 Boxen, sinkt der Preis auf CHF 7 pro Box

Beispiel 1e): Lösung

1. Berechnung der optimalen Bestellmenge für den niedrigsten Preis

Niedrigster Preis:	p = CHF 7 pro Box
Gesamtbedarf:	M = 12 Monate/Jahr * 300 Boxen/Monat
	M = 3'600 Boxen/Jahr
Bestellfixkosten:	a = CHF 30
Zins- und Lagerkostensatz:	c = 40% p.a. * 7 CHF/Box p.a.
	c = 2.80 CHF/Box p.a.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2Ma}{c}} = \sqrt{\frac{2 * 3600 * 30}{2.80}} = 277.75 \Rightarrow 278\ Boxen$$

278 < 300 ➔ weiter mit Schritt 2!

Beispiel 1e): Lösung

2. Berechnung der optimalen Bestellmenge für den zweitniedrigsten Preis

Zweitniedrigster Preis:	*p* = CHF 8 pro Box
Gesamtbedarf:	*M* = 12 Monate/Jahr * 300 Boxen/Monat
	M = 3'600 Boxen/Jahr
Bestellfixkosten:	*a* = CHF 30
Zins- und Lagerkostensatz:	*c* = 40% p.a. * 8 CHF/Box p.a.
	c = 3.20 CHF/Box p.a.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2Ma}{c}} = \sqrt{\frac{2 * 3600 * 30}{3.20}} = 259.81 \Rightarrow 260\ Boxen$$

260 > 200 ➔ Gesamtkosten dieser Lösung mit den Randwerten des höchsten Rabatts vergleichen

Beispiel 1e): Lösung

Gesamtkosten bei 260 Boxen:

$$K = pM + \frac{M}{Q^*}a + \frac{Q^*}{2}c = 8 * 3600 + \frac{3600}{260} * 30 + \frac{260}{2} * 3.20 = CHF\ 29'631.39$$

Gesamtkosten bei 300 Boxen:

$$K = pM + \frac{M}{Q^*}a + \frac{Q^*}{2}c = 7 * 3600 + \frac{3600}{300} * 30 + \frac{300}{2} * 2.80 = CHF\ 25'980$$

Die Randlösung ist günstiger.

Die optimale Bestellmenge mit Rabatten beträgt 300 Boxen.

Bestellmengenverfahren: Schlussfolgerungen

Mengenvorteile
- Mengenunabhängige Bestellkosten
- Mengenabhängige Rabatte

→ Weniger Bestellungen
→ Grosse Bestellmengen

Mengennachteile
- Zinsen auf gebundenes Kapital
- Lagerkosten

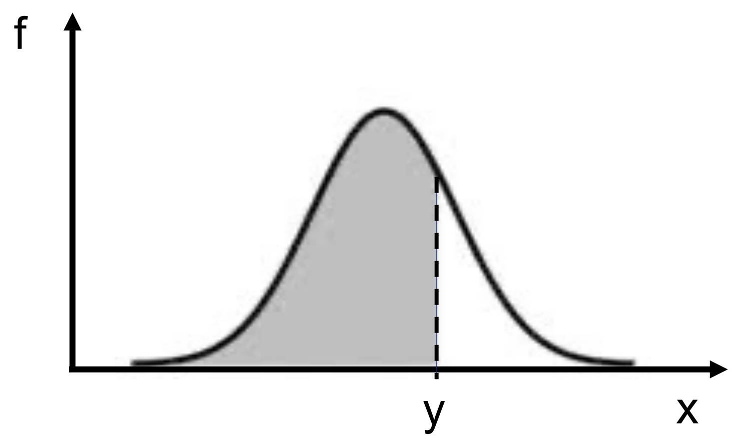
→ Viele Bestellungen
→ Kleine Bestellmengen

Modelle mit stochastischer Nachfrage

- Im Economic Order Quantity Modell wurde angenommen, dass die Nachfrage deterministisch ist
- Nun gehen wir davon aus, dass die Nachfrage stochastisch ist
- Wir gehen nun davon aus, dass die bestellte Ware verderblich ist, d.h. sie nutzt ihren Wert ganz oder teilweise ab
- Im Economic Order Quantity Modell wurden Bestellungen für den mehrperiodischen Bedarf optimiert
- Nun konzentrieren wir uns auf eine einzelne Periode
- Ein klassisches Einperiodenmodell mit stochastischer Nachfrage ist das Zeitungsjungenproblem

Das Zeitungsjungenproblem (1/5)

Ein Zeitungsjunge (Newsboy, Newsvendor) kauft Zeitungen beim Verlag für *c* je Stück ein und verkauft sie anschliessend für *p* je Stück. Alle Zeitungen, die er nicht verkaufen kann, werden wertlos (wir werden später den Fall analysieren, wenn die Zeitungen noch einen Restwert haben). Die Nachfrage nach Zeitungen *x* ist stochastisch. Der Zeitungsjunge kennt die Dichtefunktion *f(x)* der Zeitungsnachfrage. Sein Ziel ist es, den erwarteten Gewinn *E[G]* zu maximieren. Der Zeitungsjunge kann dabei nur die Anzahl *y* der von ihm beim Verlag gekauften Zeitungen beeinflussen (bitte beachten Sie, dass wir hier unterstellen, die Nachfrage nach Zeitungen sei eine stetige Zufallsvariable. In Wirklichkeit ist die Nachfrage nach Zeitungen eine diskrete Zufallsvariable).



Das Zeitungsjungenproblem (2/5)

Sein Maximierungsproblem stellt sich wie folgt dar:

(1) $$\underset{y}{\mathrm{Max}}\, E[G] = p\int_0^y xf(x)dx + py\int_y^\infty f(x)dx - cy$$

Das Zeitungsjungenproblem (3/5)

Der erwartete Gewinn setzt sich aus drei Teilen zusammen

$p\int_0^y xf(x)dx$	Dieser Term beschreibt die Einnahmen des Zeitungsjungen für den Fall, dass er mehr Zeitungen eingekauft hat, als er verkaufen kann *(x<y)*. In diesem Fall kann er die gesamte Nachfrage *x* befriedigen und erhält dafür jeweils den Preis p. Seine Einnahmen sind also gleich *px*. Wir müssen diese Einnahmensumme nun für jeden Wert von *x* unter der Bedingung *(x<y)* ermitteln und mit seiner Dichte *f(x)* multiplizieren.
$py\int_y^\infty f(x)dx$	Dieser Term beschreibt die Einnahmen des Zeitungsjungen für den Fall, dass er weniger Zeitungen eingekauft hat, als er verkaufen kann *(x>y)*. In diesem Fall könnte er also mehr Zeitungen verkaufen als er hat. Da er aber nur *y* Zeitungen hat, betragen seine Einnahmen in diesem Fall *py*. Diese Einnahmesumme müssen wir wiederum mit der Wahrscheinlichkeit multiplizieren, dass tatsächlich mehr Zeitungen nachgefragt werden als der Newsboy gekauft hat.
cy	Dieser Term beschreibt die Kosten der gekauften Zeitungen.

Das Zeitungsjungenproblem (4/5)

Um den optimalen Wert für *y* zu finden, leiten wir die Gewinnfunktion nach *y* ab und setzen dann die Ableitung gleich Null. Beachten Sie bitte, dass gilt:

(2) $\frac{d}{dy}\int_0^y f(x)dx = f(y)$ und $\frac{d}{dy}\int_y^\infty f(x)dx = -f(y)$

Folglich erhalten wir:

(3) $pyf(y) + p\int_y^\infty f(x)dx - pyf(y) - c = 0$

Dies lässt sich vereinfachen zu:

(4) $p[F(\infty) - F(y)] - c = 0$

Das Zeitungsjungenproblem (5/5)

Umformung ergibt (5) $p[1 - F(y)] - c = 0$

bzw. (6) $F(y) = \frac{p-c}{p}$

Aufgabe 1

Ein Dienstleistungsunternehmen verkauft Informationsservices über das Internet. Wegen Wartungsarbeiten an seinen eigenen Servern muss das Unternehmen kurzfristig Serverkapazitäten von einem externen Anbieter mieten. Dieser Anbieter verlangt 200 Dollar pro Tag für jedes Terabyte (TB), das er vermietet, und zwar unabhängig von der tatsächlichen Nutzung. Damit ergibt sich für das Dienstleistungsunternehmen folgendes Problem: Wenn es zu viel Serverkapazität anmietet, muss es die (vermeidbaren) Mietkosten für die Überkapazität tragen. Falls, auf der anderen Seite, zu wenig Serverkapazität angemietet wird, entgeht dem Dienstleistungsunternehmen Umsatz. Aus seiner bisherigen Markterfahrung weiss das Unternehmen, dass die benötigte Serverkapazität um einen Mittelwert von 90 TB normalverteilt ist und die Standardabweichung 10 TB beträgt. Ferner weiss das Unternehmen, dass unbeantwortete Kundenanfragen zu einem Umsatzverlust von 500 Dollar je TB führen. Wieviel Serverkapazität soll das Unternehmen anmieten?

Aufgabe 1: Lösung

- Zuerst setzen wir die entsprechenden Werte in Gleichung (6) unseres Zeitungsjungenmodells ein:

$$F(y) = \frac{p - c}{p} = \frac{500 - 200}{500} = 0.6$$

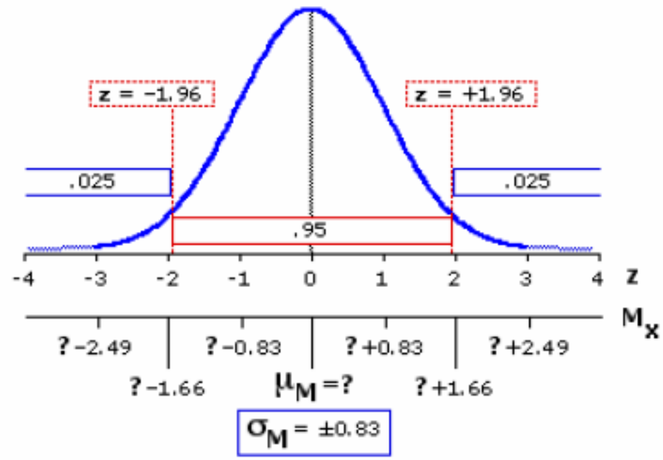
- Als nächstes müssen wir in der Standardnormalverteilungstabelle den z-Wert finden, der folgende Gleichung löst: $F(z) = 0.6$.
- Der entsprechende z-Wert ist 0.25.
- Die Serverkapazität, die angemietet werden soll, erhält man dann wie folgt:

$$y^* = \mu + 0.25 * \sigma = 90 + 0.25 * 10 = 92.5$$

➔ Das Dienstleistungsunternehmen soll 92.5 TB Serverkapazität anmieten.

Standardnormalverteilung

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986



Standardizing normal random variables *(X ~ N(μ,σ2))*

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$ with *Z ~ N*(0,1)

Das Zeitungsjungenproblem: Marginalbetrachtung

Das Zeitungsjungenproblem lässt sich auch mittels Marginalbetrachtung lösen:

- Der Zeitungsjunge sollte die Anzahl *y* an Zeitungen, die er beim Verlag kauft, solange erhöhen, bis der erwartete Umsatz der zuletzt gekauften Zeitung gerade den erwarteten Kosten dieser zuletzt gekauften Zeitung entspricht.
- Der erwartete Umsatz der zuletzt beim Verlag gekauften Zeitung beträgt $p[1 - F(y)]$, d.h. Preis der Zeitung p multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit, dass diese letzte Zeitung verkauft werden kann $[1 - F(y)]$.
- Die erwarteten Kosten der letzten gekauften Zeitung sind c.
- Somit erhalten wir:

$$p[1 - F(y)] = c \qquad (7)$$

- Durch Umformen von (7) erhalten wir wiederum (6):

$$F(y) = \frac{p-c}{p} \qquad (6)$$

Zeitungsjungenproblem: Diskreter Fall mit Restwert (1/3)

Für diesen Fall benutzen wir folgende Notation:

- x = Nachfrage nach Zeitungen
- y = Anzahl Zeitungen, die der Zeitungsjunge beim Verlag kauft
- p = Verkaufspreis der Zeitung
- c = Kosten der Zeitung (Preis, den der Zeitungsjunge dem Verlag bezahlt)
- s = Restwert einer Zeitung

Zeitungsjungenproblem: Diskreter Fall mit Restwert (2/3)

- C_U = Kosten der Unterschätzung der Nachfrage (Costs of Underestimating) = $p - c$ (wenn der Zeitungsjunge nicht genug Zeitungen beim Verlag gekauft hat, weil er die Nachfrage unterschätzt hat, entgeht ihm bei Marginalbetrachtung ein Gewinn in Höhe von $p - c$, da er eine zusätzliche Zeitung zum Preis p hätte verkaufen können, wenn er sie zu Kosten in Höhe von c beim Verlag gekauft hätte
- C_O = Kosten der Überschätzung der Nachfrage (Costs of Overestimating) = $c - s$ (wenn der Zeitungsjunge zu viele Zeitungen gekauft hat, d.h. die Nachfrage überschätzt hat, verliert er $c - s$ pro Zeitung, die er zu Kosten c gekauft hat, aber zum Preis p nicht mehr verkaufen kann, sondern nur noch zum Restwert s verwerten kann)
- Ohne den Restwert, d.h. ohne die Möglichkeit, die nichtverkauften Zeitungen zum Restwert s zu verwerten, wären die Kosten der Überschätzung $\mathrm{C_O} = \mathrm{c} - 0 = \mathrm{c}$

Zeitungsjungenproblem: Diskreter Fall mit Restwert (3/3)

Bei Marginalbetrachtung sollte der erwartete Gewinn der zuletzt beim Verlag gekauften Zeitung nicht geringer als die erwarteten Kosten dieser Zeitung sein:

(8) $(p - c) Prob(x \geq y) \geq (c - s) Prob(x < y)$

Dies ist gleichbedeutend damit, dass der Zeitungsjunge die Anzahl der Zeitungen, die er beim Verlag kauft, solange erhöhen soll, bis die erwarteten Kosten der Unterschätzung grösser oder gleich der erwarteten Kosten der Überschätzung sind:

(9) $[1 - Prob(x < y)] C_U \geq Prob(x < y) C_O$

Durch Umformen erhält man:

(10) $Prob(x < y) \leq \frac{C_U}{C_U + C_O}$

Durch Einsetzen von $C_U = p - c$ und $C_O = c - s$ erhält man:

(11) $Prob(x < y) \leq \frac{p-c}{p-s}$

Aufgabe 2

Beates Geschenkladen möchte eine Bestellung für Weihnachtsschokolade aufgeben. Die Schokolade wird für 12 CHF pro Tafel gekauft und kann bis Weihnachten für 25 CHF pro Tafel verkauft werden. Nach Weihnachten können die restlichen Schokoladentafeln nur mit einem hohen Rabatt für 9.99 CHF pro Stück verkauft werden. Basierend auf der Erfahrung der letzten Jahre wird die Nachfrage gemäss der folgenden Tabelle geschätzt:

Nachfrage	Wahrscheinlichkeit in %
10	20
11	30
12	40
13	10

Wie viele Tafeln Weihnachtsschokolade sollte Beate bestellen?

Aufgabe 2: Lösung

Das Problem wird anhand von (11) gelöst:

$$Prob(x < y) \leq \frac{p-c}{p-s} \leq \frac{25-12}{25-9.99} = \frac{13}{15.01} \approx 0.866 = 86.6\%$$

Anschliessend muss $Prob(x < y)$ berechnet werden, um die grösste Anzahl Tafeln mit einer kumulativen Wahrscheinlichkeit $Prob(x < y) \leq 86.6\%$ zu finden. Die Ergebnisse werden in der Tabelle dargestellt:

Nachfrage	Wahrscheinlichkeit in %	$Prob(x < y)$ in %
10	20	0
11	30	20
12	40	50
13	10	90

➔ Beate sollte 12 Tafeln Weihnachtsschokolade bestellen.